

[This question paper contains 8 printed pages.]

Your Roll No.....



Sr. No. of Question Paper : 1608

Unique Paper Code : 12271202

Name of the Paper : Mathematical Methods for
Economics-II

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are 4 questions in all.
3. **All** questions are compulsory.
4. All parts of a question must be answered together.
5. Use of simple calculator is allowed.

1. Answer any **four** of the following : (4×5=20)

(a) The marginal cost (in lakhs of rupees) of producing a motor car is given by $6 + 4x^2 + 1.5e^x$, where x is the quantity produced. Determine the total cost producing 5 motor cars if the fixed cost is Rs. 7 Lakhs. It is given that $e^x = 0.006$.

(b) (i) Suppose $Y = Y(t)$ is national product, $C(t)$ is consumption at time t , and $\bar{I}$ is Investment, which is constant. Suppose $\dot{Y} = \alpha(C + \bar{I} - Y)$ and $C = aY + b$, where a , b and α are positive constants with $a < 1$. Derive a differential equation for Y .

(ii) Find its solution when $Y(0) = Y_0$ is given. What happens to $Y(t)$ as $t \rightarrow \infty$?

(c) Let Y_t denote national income, I_t total investment, and S_t total saving – all in period t . Suppose savings are proportional to national income, and that investment is proportional to the change in income from period t to $t+1$. Then, for $t = 0, 1, 2, \dots$,

$$(i) S_t = \beta Y_t$$

$$(ii) I_{t+1} = \alpha(Y_{t+1} - Y_t)$$

$$(iii) S_t = I_t \quad \alpha, \beta > 0 \quad \beta < \alpha$$

Deduce a difference equation determining the path of Y_t , given Y_0 and solve it.

(d) Find the general form of a function f whose second derivative $f''(x)$ is equal to x^2 . If we require in addition that $f(0) = -1$, what is $f(x)$?

(e) Find the area of the region bounded by $y = x^2$ and $y = x$.

2. Answer any **four** of the following : (4×5=20)

(a) Show that the production function $Y = Ax^\alpha y^\beta$ where $A, \alpha, \beta > 0$ has elasticity of substitution 1 everywhere.

(b) A firm sells 2 brands X and Y of a soap. The outputs and prices are denoted by x, y, p and q respectively. The demand functions of the two

brands are : $x = 100 - 2p + 5q$ and $y = 80 + 4p - 3q$. Suppose brand X sells for rupees 15 per unit and Y for 12 per unit. Estimate the approximate change in revenue if the prices are increased by 1 per unit for X and 1.5 per unit for Y and compare it with the actual change in revenue.

(c) Draw the level curves for the function

$$f(x, y) = \frac{2x - 2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{for levels } k = 0, 1.$$

[For PWD candidates in lieu of part c]

Find the equation of the tangent plane at a point $(1, 1, 5)$ to the function $x^2 + 2xy + 2y^2$

(d) Examine the definiteness of the following quadratic forms :

(i) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

(ii) $-x^2 + y^2$ subject to $2x - 3y = 5$

(e) Find and sketch the domain of the following functions :

$$(i) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$$

$$(ii) f(x, y) = \sqrt{y + 4} - \sqrt{x + 1}$$

[For PWD candidates in lieu of part e]

Find the domain of the following functions :

$$(i) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$$

$$(ii) f(x, y) = \sqrt{y + 4} - \sqrt{x + 1}$$

$$(iii) f(x, y) = \ln(y^2 - x)$$

3. Answer any **four** of the following : (4×7=28)

(a) Based on the table, classify each of the following points as a local maximum, local minimum, saddle point, not a critical point, or not enough information to classify.

Point	f'_x	f'_y	f''_{xx}	f''_{xy}	f''_{yy}
A	1	2	3	4	5
B	0	0	0	0	0
C	0	0	1	2	3
D	0	0	0	1	0
E	0	0	0	-1	0

(b) Find the extreme points of the function $f(x,y) = 9x + 8y - 6(x+y)^2$ subject to $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 3$ and $x - 2y \geq -2$.

(c) Find all extreme points and/or saddle points of the function :

$$3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

(d) Define quasi-concave and quasi-convex functions.

Prove geometrically or otherwise that $y = x^2$: $x \geq 0$ is both quasi-concave and quasi-convex.

- (e) Find the maximum and minimum values of $f(x, y) = x + y$ subject to $x^2 + y^2 = 4$ using Lagrange multiplier method. Verify the second order conditions.

4. Answer any **one** of the following : (1×7=7)

- (a) The Eco club Econ manufactures eco-friendly inexpensive notebooks and diaries. Each notebook takes 4 Kgs of paper pulp and 2 litres of water solution in its preparation while each diary requires 3 Kgs of paper pulp and 1 litre of water solution. The club has 240 Kgs of paper pulp and 100 litres of water solution available with it. Each notebook sold gives a profit of Rs. 7 and each diary gives a profit of Rs. 5. Using linear programming, find the optimal combination of notebooks and diaries to be produced in order to maximize the profit.
- (b) Is there a solution to the following linear programming problem?

Maximize $x_1 + x_2$ subject to

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \end{cases} \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Will a solution exist if the objective function is changed to $z = -x_1 - x_2$?

Solve wherever possible.

[This question paper contains 16 printed pages.]



Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 5137

Unique Paper Code : 2272101201

Name of the Paper : INTRODUCTORY
MACROECONOMICS

Name of the Course : **B.A. (H) ECONOMICS :
DSC**

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any **5** questions.
3. Part of the questions are to be attempted together.
4. **All** questions carry equal marks.
5. Use of a simple calculator allowed.
6. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. कोई भी 5 प्रश्न हल करें ।
3. प्रश्नों के खंडों को एक साथ हल करना होगा ।
4. सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।
5. एक साधारण कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है ।
6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

1. (a) (i) Are interest payments on National Debt counted as part of the Gross Domestic Product? Give reasons.

-
- (ii) A payment of ₹10,000 is made by an Indian citizen for dinner at a Thai restaurant in Thailand by Visa credit card. How is this transaction accounted for in the balance of payments account of India? (4)

-
-
- (b) A bond provides to pay ₹100 in one year :

-
-
-
- (i) What is the interest rate on the bond if its price today is ₹75 and ₹90?

(ii) If the interest rate is 8%, what is the price of the bond today? (4)

(c) (i) Analyse the effect of a reduction in the marginal income tax rate on output, employment and the price level in the Classical model with suitable diagrams.

(ii) What are the various stages in the monetary transmission mechanism? (7,3)

(क) (i) क्या राष्ट्रीय ऋण पर ब्याज भुगतान को सकल घरेलू उत्पाद के हिस्से के रूप में गिना जाता है? कारण बताएं।

(ii) एक भारतीय नागरिक द्वारा थाईलैंड के एक थाई रेस्तरां में रात्रिभोज के लिए वीज़ा क्रेडिट कार्ड द्वारा ₹10,000 का भुगतान किया जाता है। इस लेन-देन का हिसाब भारत के भुगतान संतुलन खाते में कैसे किया जाता है?

(ख) एक बांड में एक वर्ष में ₹100 का भुगतान करने का प्रावधान है:

(i) यदि बांड की आज कीमत ₹75 और ₹90 है तो उस पर ब्याज दर क्या है?

(ii) यदि ब्याज दर 8% है, तो आज बांड की कीमत क्या है?

- (ग) (i) उपयुक्त रेखाचित्रों के साथ क्लासिकल मॉडल में उत्पादन, रोजगार और मूल्य स्तर पर सीमांत आयकर दर में कमी के प्रभाव का विश्लेषण करें।
- (ii) मौद्रिक संचरण तंत्र में विभिन्न चरण क्या हैं?

2. (a) Use the following data to calculate private, government and national savings :

$$\text{GDP} = 7000$$

$$\text{Net factor payments from abroad} = -70$$

$$\text{Consumption} = 4480$$

$$\text{Government purchases} = 1400$$

$$\text{Interest payments on government debt} = 210$$

$$\text{Taxes} = 2450$$

$$\text{Transfers} = 1050 \quad (4)$$

- (b) If the central bank follows an expansionary open market operation, how does it affect the money supply in the economy? Explain. (4)

- (c) (i) Given the following information:

$$\text{Consumption } C = 80 + 0.75Y_d$$

$$\text{Investment } I = 100$$

Government Expenditure $G = 200$

Transfer Payments $TR = 100$

Tax $t = .20$

(a) Calculate the equilibrium level of income and the multiplier.

(b) Write the saving function and calculate the level of saving.

(c) Calculate the budget surplus.

(d) Suppose that t increases to 0.25, what is the new equilibrium income and multiplier?

(ii) Using the IS-LM model, derive the aggregate demand curve. (7,3)

(क) निजी, सरकारी और राष्ट्रीय बचत की गणना के लिए निम्नलिखित आंकड़ों का उपयोग करें :

GDP = 7000

विदेश से शुद्ध कारक भुगतान = -70

उपभोग = 4480

सरकारी खरीद = 1400

सरकारी ऋण पर ब्याज भुगतान = 210

कर = 2450

हस्तांतरण = 1050

(ख) यदि केंद्रीय बैंक एक विस्तारवादी खुले बाजार संचालन का अनुसरण करता है, तो यह अर्थव्यवस्था में मुद्रा आपूर्ति को कैसे प्रभावित करता है? व्याख्या करें।

(ग) (i) निम्नलिखित जानकारी दी गई :

उपभोग (C) = $80 + 0.75Y_d$

निवेश (I) = 100

सरकारी व्यय (G) = 200

हस्तांतरण भुगतान (TR) = 100

कर $T = .20$

(अ) आय के संतुलन स्तर और गुणक की गणना करें।

(ब) बचत फलन लिखें और बचत के स्तर की गणना करें।

(स) बजट अधिशेष की गणना करें।

(द) मान लीजिए कि t बढ़कर 0.25 हो जाता है, तो नई संतुलन आय और गुणक क्या है?

- (ii) IS-LM मॉडल का उपयोग करके, कुल मांग वक्र प्राप्त करें।

3. (a) What is national wealth? How is national wealth linked to national saving? (4)

(b) How is the rate of interest determined by the demand and supply of money? What happens to the interest rate if nominal income falls? Use a suitable diagram. (4)

(c) Given the following information :

$$\text{Consumption } C = 100 + 0.8Y_d$$

$$\text{Investment } I = 400 - 50i$$

$$\text{Government Expenditure } G = 500$$

$$\text{Tax } t = 0.25$$

$$\text{Price level } P = 2$$

$$\text{Nominal money supply } M = 1200$$

$$\text{Demand for money } L = 0.40Y - 50i$$

(i) Write down the IS-LM equations.

(ii) What is the equilibrium level of income and interest rate?

(iii) Derive the fiscal and monetary policy multipliers.

(iv) How much does an increase in government spending by 100 increase the income level in the model, which includes the money market? What will be the new equilibrium interest rate? (10)

(क) राष्ट्रीय संपदा क्या है? राष्ट्रीय संपदा राष्ट्रीय बचत से कैसे जुड़ा है?

(ख) ब्याज की दर, मुद्रा की मांग और आपूर्ति से कैसे निर्धारित होती है? यदि मौद्रिक आय गिरती है तो ब्याज दर का क्या होगा? एक उपयुक्त आरेख का प्रयोग करें।

(ग) निम्नलिखित जानकारी दी गई :

$$\text{उपभोग } C = 100 + 0.8Y_d$$

$$\text{निवेश } I = 400 - 50i$$

$$\text{सरकारी व्यय } G = 500$$

$$\text{टैक्स } t = 0.25$$

$$\text{मूल्य स्तर } P = 2$$

$$\text{मौद्रिक मुद्रा आपूर्ति } M = 1200$$

मुद्रा की मांग $L = 0.40Y - 50i$

(i) IS-LM समीकरण लिखिए।

(ii) आय और ब्याज दर का संतुलन स्तर क्या है?

(iii) राजकोषीय और मौद्रिक नीति गुणक प्राप्त करें।

(iv) सरकारी खर्च में 100 की वृद्धि से मॉडल में आय स्तर में कितनी वृद्धि होती है, जिसमें मुद्रा बाजार भी शामिल है? नई संतुलन ब्याज दर क्या होगी?

4. (a) The nominal interest rate is 7%, today's price level is 150, and you expect the price level to be 156 from now. What is the expected inflation rate? What is the expected real interest rate? (4)
- (b) Suppose the ratio of currency to checkable deposits is 0.25 and the reserve ratio is 0.25, what is the value of money multiplier? (4)
- (c) (i) Explain the concept of crowding out. Also, explain the extreme cases with suitable diagrams :
- (a) Full crowding out
- (b) No crowding out

(ii) What are the automatic stabilisers? Explain with the help of examples. (7,3)

(क) मौद्रिक ब्याज दर 7% है, आज का मूल्य स्तर 150 है, और आप अब से मूल्य स्तर 156 होने की उम्मीद करते हैं। अपेक्षित मुद्रास्फीति दर क्या है? अपेक्षित वास्तविक ब्याज दर क्या है?

(ख) मान लीजिए कि मुद्रा और चेक सुविधा योग्य जमा का अनुपात 0.25 है और आरक्षित अनुपात 0.25 है, तो मुद्रा गुणक का मूल्य क्या है?

(ग) (i) क्राउडिंग आउट की अवधारणा को स्पष्ट करें। इसके अलावा, उपयुक्त रेखाचित्रों के साथ चरम मामलों की व्याख्या करें:

(अ) पूर्ण क्राउडिंग आउट

(ब) शून्य क्राउडिंग आउट

(ii) स्वचालित स्टेबलाइजर क्या हैं? उदाहरणों की सहायता से समझाइये।

5. (a) What is a GDP deflator? How is it different from Consumer Price Index? (4)

- (b) Using the Fisher approach to the Quantity Theory of Money, explain the relationship between the quantity of money and price level. (4)
- (c) (i) The marginal propensity to consume is 0.9. The income tax is one-third of the income. The government decides to increase spending to increase GDP by Rs. 750 lakhs. How much should government spending increase? What happens to the budget deficit?
- (ii) Explain the effects of investment subsidy on the equilibrium interest rate, consumption, investment and GDP. Use suitable diagram. (5,5)
- (क) अपस्फीतिकारक क्या है? यह उपभोक्ता मूल्य सूचकांक से किस प्रकार भिन्न है?
- (ख) मुद्रा के परिमाण सिद्धांत के फिशर दृष्टिकोण का उपयोग करते हुए, मुद्रा का परिमाण और मूल्य स्तर के बीच संबंध की व्याख्या करें।
- (ग) (i) सीमांत उपभोग प्रवृत्ति 0.9 है। आयकर आय का एक तिहाई है। सरकार ने GDP बढ़ाने के लिए खर्च 750 लाख बढ़ाने का फैसला किया है। सरकारी खर्च कितना बढ़ना चाहिए? बजट घाटे का क्या होगा?

- (ii) संतुलन ब्याज दर, उपभोग, निवेश और सकल घरेलू उत्पाद पर निवेश सब्सिडी के प्रभावों की व्याख्या करें।
उपयुक्त आरेख का प्रयोग करें।

6. (a) Why do three methods of national income accounting yield the same measure of GDP?

(4)

(b) The following financial market data is given for an economy (in rupees) :

(4)

Currency = 10,000

Reserves = 2,000

Deposits = 20,000

Calculate the following :

(i) Size of the money multiplier

(ii) Monetary Base

(iii) Money Supply

(c) (i) "With a decrease in the marginal propensity to save, the IS curve will become steeper". Agree or disagree. Explain the answer.

- (ii) Explain the impact of an autonomous decline in investment on the overall demand in the economy in the Classical Model with the help of a diagram. (5,5)

(क) राष्ट्रीय आय लेखांकन के तीनों पद्धतियों से सकल घरेलू उत्पाद का समान माप क्यों प्राप्त होता है?

(ख) एक अर्थव्यवस्था के लिए निम्नलिखित वित्तीय बाजार आंकड़ा दिया गया है (रुपये में):

$$\text{मुद्रा} = 10,000$$

$$\text{आरक्षित निधि} = 2,000$$

$$\text{जमा} = 20,000$$

निम्नलिखित की गणना करें :

(i) मुद्रा गुणक का आकार

(ii) मौद्रिक आधार

(iii) मुद्रा आपूर्ति

(ग) (i) “बचत की सीमांत प्रवृत्ति में कमी के साथ, IS वक्र तीव्र हो जाएगा”। सहमत या असहमत। उत्तर स्पष्ट करें।

- (ii) क्लासिकल मॉडल में एक चित्र की सहायता से अर्थव्यवस्था में समग्र मांग पर निवेश में स्वतंत्र गिरावट के प्रभाव की व्याख्या करें।

7. (a) (i) Is it correct to say that to finance its current account balance, a country must increase its Private Savings? Explain.

(ii) If a country has a current account deficit of \$120 million and a capital account surplus of \$80 million, what is the net change in its official reserve assets? (4)

(b) What is the demand for Central Bank money? How is equilibrium determined in the market for Central Bank money? (4)

(c) (i) Suppose that the government follows a fiscal policy such that an increase in government spending is equal to the fall in transfer payments where :

$$\text{Consumption} = 0.75$$

$$\text{Tax} = 0.20$$

$$\text{Income} = 1000$$

$$\text{Change in government spending} = 20$$

Change in transfer payments = -20

(a) Find the change in equilibrium income.

(b) Find the change in budget surplus.

(ii) "As the demand for money becomes more sensitive to change in income, does the LM curve become steeper or flatter". Explain your answer. (5,5)

(क) (i) क्या यह कहना सही है कि किसी देश को अपने चालू खाते के शेष को वित्तपोषित करने के लिए अपनी निजी बचत बढ़ानी होगी? व्याख्या करें।

(ii) यदि किसी देश का चालू खाता घाटा \$120 मिलियन है और पूंजी खाता अधिशेष \$80 मिलियन है, तो इसकी आधिकारिक आरक्षित परिसंपत्ति में शुद्ध परिवर्तन क्या है?

(ख) केंद्रीय बैंक के मुद्रा की मांग क्या है? केंद्रीय बैंक के मुद्रा के लिए बाजार में संतुलन कैसे निर्धारित किया जाता है?

(ग) (i) मान लीजिए कि सरकार एक ऐसी राजकोषीय नीति का पालन करती है, जिसमें सरकारी खर्च में वृद्धि हस्तांतरण भुगतान में गिरावट के बराबर है : जहाँ

$$\text{उपभोग} = 0.75$$

$$\text{कर} = 0.20$$

$$\text{आय} = 1000$$

$$\text{सरकारी खर्च में परिवर्तन} = 20$$

$$\text{हस्तांतरण भुगतान में परिवर्तन} = -20$$

(अ) संतुलन आय में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

(ब) बजट अधिशेष में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

- (ii) “जब मुद्रा की मांग, आय में परिवर्तन के प्रति अधिक संवेदनशील हो जाती है, क्या LM वक्र तीव्र या सपाट हो जाता है”। अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

[This question paper contains 16 printed pages]

Your Roll No.....



Sr. No. of Question Paper : 5190

Unique Paper Code : 2272101202

Name of the Paper : Intermediate Mathematical
Methods for Economics

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics –
DSC

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. This question paper is divided into **three** sections.
3. Use of simple calculator is allowed.
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।

2. यह प्रश्न पत्र तीन खण्डों में विभाजित है ।
3. साधारण कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति है ।
4. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

SECTION A

Attempt any five of the following questions : (5×8=40)

निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. (a) What is the derivative of $f(x, y) = x^2y^5$ at $P = (3, 1)$ in the direction of the vector $Q = (4, -3)$.

- (b) Find the equation of the tangent plane to $z = e^{xy} + y^2e^{y-1}$ at $(0, 1)$. (4+4)

(क) वेक्टर $Q = (4, -3)$ की दिशा में $P = (3, 1)$ पर $f(x, y) = x^2y^5$ का व्युत्पन्न क्या है।

(ख) टेंगेट विमान के समीकरण को $z = e^{xy} + y^2e^{y-1}$ at $(0, 1)$ पर खोजें।

2. (a) When is a set of vectors $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ said to be linearly dependent?

(b) Prove that the vectors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ are linearly dependent. (3+5)

(क) वैक्टर का एक सेट $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ को रैखिक रूप से निर्भर कब कहा जाता है?

(ख) साबित करें कि वैक्टर $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ और $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ रैखिक रूप से निर्भर हैं।

3. (a) Show that the following production function has elasticity of substitution 1 everywhere.

$$Y = Ax^\alpha y^\beta, \quad A, \alpha, \beta > 0$$

- (b) The amount x of some good demanded depends on the price p of the good and the amount a the producer spends on research and development of the product: $x = f(p, a)$, with $f'_p(p, a) < 0$ and $f'_a(p, a) > 0$ for all (p, a) .

The price depends on the weather, measured by the parameter w , and the tax rate t : $p = g(w, t)$, where $g'_w(w, t) > 0$ and $g'_t(w, t) < 0$ for all (w, t) . The amount spent on R&D depends only on t : $a = h(t)$, with $h'(t) > 0$.

If the tax rate increases does the demand for the good necessarily increase or necessarily decrease, or neither? (4+4)

(क) दिखाएं कि निम्नलिखित उत्पादन फलन में प्रतिस्थापन 1 की हर जगह लोच है।

$$Y = Ax^\alpha y^\beta, A, \alpha, \beta > 0$$

(ख) कुछ वस्तुओं की मात्रा x वस्तु की कीमत p पर निर्भर करती है और निर्माता उत्पाद के अनुसंधान और विकास पर खर्च करता है: $x = f(p, a)$, $f'_p(p, a) < 0$ के साथ और $f'_a(p, a) > 0$ सभी (p, a) के लिए।

मूल्य मौसम पर निर्भर करता है, पैरामीटर w द्वारा मापा जाता है, और कर की दर t : $p = g(w, t)$, जहां $g'_w(w, t) > 0$ और $g'_t(w, t) < 0$ सभी (w, t) के लिए।

R&D पर खर्च की गई राशि केवल t : $a = h(t)$, $h'(t) > 0$ के साथ निर्भर करती है। यदि कर की दर बढ़ जाती है तो क्या वस्तु की माँग आवश्यक रूप से बढ़ती है या अनिवार्य रूप से घटती है, या नहीं?

4. (a) Define the rank of a matrix.

(b) Find the rank of the following matrix for various values of p and q :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2+6)$$

(क) एक मैट्रिक्स के रैंक को परिभाषित करें।

(ख) p और q के विभिन्न मूल्यों के लिए निम्नलिखित मैट्रिक्स का रैंक खोजें :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (a) Find the equation of a hyperplane through the origin in the direction of the vectors $(1, 2, 2)$ and $(4, 1, -1)$. Where does the above plane intersect the line given by

$$x_1 = -t + 2, x_2 = 2t - 1 \text{ and } x_3 = t + 3$$

(b) Let there exist a non-null vector x such that

$Ax = \lambda x$, where $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. Find $\lambda \in \mathbb{R}$ and compute $A^{10}x$ for each value of λ and the associated x . (4+4)

(क) वैक्टर $(1, 2, 2)$ और $(4, 1, -1)$ की दिशा में मूल के माध्यम से एक हाइपरप्लेन का समीकरण खोजें। उपरोक्त तल द्वारा दी गई रेखा को $x_1 = -t + 2$, $x_2 = 2t - 1$ और $x_3 = t + 3$ कहाँ काटता है?

(ख) चलो एक गैर-शून्य वेक्टर x मौजूद है जैसे कि $Ax = \lambda x$, जहाँ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ है और $\lambda \in \mathbb{R}$ । $\lambda \in \mathbb{R}$ खोजें और λ संबंधित x के प्रत्येक मान के लिए $A^{10}x$ की गणना करें।

6. (a) For the following function defined on $\mathbb{R}^2$, find the critical points and classify them as maxima, minima, saddle:

$$f(x, y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$$

(b) Let $f(x_1, x_2) = x^3 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 8x_1 - 2x_2 - 8$. Find the set of ordered pairs of (x_1, x_2) for which f is convex, if any. (4+4)

- (क) आर R^2 पर परिभाषित निम्नलिखित कार्यों के लिए, महत्वपूर्ण बिंदु खोजें और उन्हें अधिकतम, न्यूनतम, सैडल के रूप में वर्गीकृत करें :

$$f(x, y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$$

(ख) $f(x_1, x_2) = x^3 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 8x_1 - 2x_2 - 8$

(x_1, x_2) के क्रमित युग्मों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिसके लिए f उत्तल है, यदि कोई हो।

SECTION B

Attempt any **three** of the following questions. ($3 \times 10 = 30$)

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

7. (a) Consider the system of equations :

$$x + 2y + z = 5$$

$$3x^2yz = 12$$

Show that the 3 variables can be divided into two sets $\{x \text{ and } (y, z)\}$ or $\{z \text{ and } (x, y)\}$ of 1 exogenous and 2 endogenous variables in a neighbourhood of $x=2, y=1, z=1$ so that the Implicit Function Theorem

is applicable. If the exogenous variable increases by 0.25, estimate the change in each of the endogenous variables for either case.

- (b) An insect is crawling on a hot surface the temperature of which at the point x units to the right of the lower left corner and y units up from the lower left corner is given by

$$T(x,y) = 100 - x^2 - 3y^3$$

If the insect is at the point $(2,1)$, in what direction should it move to cool off the fastest? How fast will the temperature drop in this direction?

(5+5)

- (क) समीकरणों की प्रणाली पर विचार करें :

$$x + 2y + z = 5$$

$$3x^2yz = 12$$

दिखाएं कि 3 चरों को $x=2$, $y=1$, $z=1$ के पड़ोस में 1 बहिर्जात और 2 अंतर्जात चर के दो सेट $\{x \text{ और } (y,z)\}$ या $\{z \text{ और } (x,y)\}$ में विभाजित किया जा सकता है, ताकि इम्प्लिसिट फंक्शन प्रमेय लागू हो। यदि बहिर्जात चर 0.25 से बढ़ जाता है, तो किसी भी मामले के लिए प्रत्येक अंतर्जात चर में परिवर्तन का अनुमान लगाएं।

(ख) एक कीट एक गर्म सतह पर रेंग रहा है, जिसका तापमान निचले बाएँ कोने के दाई ओर बिंदु x इकाई और निचले बाएँ कोने से y इकाई ऊपर $T(x,y) = 100 - x^2 - 3y^3$ द्वारा दिया जाता है।

यदि कीट बिंदु $(2,1)$ पर है, तो उसे सबसे तेजी से ठंडा होने के लिए किस दिशा में जाना चाहिए? इस दिशा में तापमान कितनी तेजी से गिरेगा?

8. (a) Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ and $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Is the

equation $Ax = b$ consistent for all possible values of b_1 , b_2 and b_3 ?

(b) Any square matrix is said to be lower triangular if all the elements above the main diagonal are zeros. For any 3×3 lower triangular matrix, find out a necessary condition under which it is invertible. Show that its inverse is also lower triangular. (5+5)

(क) चलो $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ और $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ । क्या

समीकरण $Ax = b$, b_1 , b_2 और b_3 के सभी संभावित मानों के लिए संगत है?

(ख) किसी भी वर्ग मैट्रिक्स को निचला त्रिकोणीय कहा जाता है यदि मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी तत्व शून्य हैं। किसी भी 3×3 निचले त्रिकोणीय मैट्रिक्स के लिए, एक आवश्यक स्थिति का पता लगाएं जिसके तहत यह व्युत्क्रमणीय है। दर्शाइए कि इसका प्रतिलोम भी निम्न त्रिभुजाकार है।

9. (a) Determine whether the function $f(x,y) = ye^{-x}$ is quasiconcave for the region in which $x \geq 0$ and $y \geq 0$.

(b) A company produces two goods, butter and jelly and sells them at prices Rs.2 per kg for butter and Rs.3 per kg for jelly. The cost of production of x kgs of butter and y kgs of jelly is

$$C(x, y) = x^2 + 3xy + y^2.$$

How much butter and jelly should the company produce to get the maximum profit? (5+5)

(क) निर्धारित करें कि फलन $f(x, y) = ye^{-x}$ उस क्षेत्र के लिए क्रासिकोनकोव है जिसमें $x \geq 0$ और $y \geq 0$ है।

(ख) एक कंपनी दो सामान, मक्खन और जेली का उत्पादन करती है और उन्हें मक्खन के लिए 2 रुपये प्रति किलोग्राम और जेली के लिए 3 रुपये प्रति किलोग्राम की कीमत पर बेचती है। x किग्रा मक्खन और y किग्रा जेली की उत्पादन लागत है

$$C(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$$

अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए कंपनी को कितना मक्खन और जेली का उत्पादन करना चाहिए?

10. Consider the function $f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$.

(a) Determine values of the constants a , b , and c such that f has a local minimum at the point

$(2/3, 1/3)$ with local minimum value of $-\frac{1}{9}$.

(b) With the values of a , b , and c found in part (a), find the maximum and minimum values of f over the set $S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}$.

(5+5)

फलन $f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$ पर विचार कीजिए।

(क) स्थिरांक a , b , और c के मान निर्धारित करें जैसे कि f का

स्थानीय न्यूनतम बिंदु $(2/3, 1/3)$ पर $-\frac{1}{9}$ के स्थानीय न्यूनतम मान के साथ है।

(ख) भाग (a) में पाए गए a , b और c के मूल्यों के साथ, सेट

$S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}$ पर f के

अधिकतम और न्यूनतम मान खोजें।

SECTION C

Attempt any **two** of the following questions. $(2 \times 10 = 20)$

निम्नलिखित में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

11. (a) A matrix P is said to be orthogonal if $P'P = I$.

Prove that a necessary condition for an orthogonal matrix is that any two different columns of this matrix are orthogonal.

(b) Find the values of k for which the following system of equations:

$$2x + ky + z = 2$$

$$4x + 2ky + kz = 4$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

has a unique solution, no solution or infinitely many solutions. (5+5)

(क) एक मैट्रिक्स P को ऑर्थोगोनल कहा जाता है यदि $P'P = I$ । साबित करें कि ऑर्थोगोनल मैट्रिक्स के लिए एक आवश्यक शर्त यह है कि इस मैट्रिक्स के दो अलग-अलग कॉलम ऑर्थोगोनल हैं।

(ख) k के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली :

$$2x + ky + z = 2$$

$$4x + 2ky + kz = 4$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

एक अद्वितीय समाधान है, कोई समाधान नहीं है या अपरिमित रूप से कई समाधान हैं।

12. (a) The production function of a firm is $x^a y^b$. Its current level of inputs is $x=25$ and $y=100$ and currently $a = b = 0.5$. The firm adopts a new technology that changes b to 0.504 with no change in a . Estimate the input combination which will keep the total output the same and the sum of inputs the same. Use the following system of equations:

$$a \ln x + b \ln y = \ln z; \quad x + y = 125$$

- (b) Is the sum of two homogeneous functions necessarily homogeneous? Is the product of two homogeneous functions necessarily homogeneous? Prove or provide a counter example. (Note: The degree of homogeneity of the two functions is not necessarily equal). (5+5)

- (क) एक फर्म का उत्पादन फलन $x^a y^b$ है। इसके इनपुट का वर्तमान स्तर $x=25$ और $y=100$ है और वर्तमान में $a = b = 0.5$ है। फर्म एक नई तकनीक को अपनाती है जो a में बिना किसी बदलाव के b से 0.504 में बदल जाती है। इनपुट संयोजन का अनुमान लगाएं जो कुल आउटपुट को समान रखेगा और इनपुट का योग समान रखेगा। समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली का प्रयोग करें:

$$a \ln x + b \ln y = \ln z; \quad x + y = 125$$

(ख) क्या दो सजातीय कार्यों का योग आवश्यक रूप से सजातीय है? क्या दो समरूप फलों का गुणनफल आवश्यक रूप से समरूप है? एक प्रति उदाहरण साबित करें या प्रदान करें। (ध्यान दें: दो कार्यों की एकरूपता की डिग्री आवश्यक रूप से समान नहीं है)।

13. (a) In a competitive market, a firm produces good Q according to the function

$$Q(K, L) = 8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$$

where, K and L are capital and labour respectively. Given the unitary prices of Rs.5 for output and Rs.2 and Rs.10 for inputs, find the optimal values of K and L which maximise the profit π . Also, calculate the maximum profit, π .

- (b) By drawing diagrams (or by making precise algebraic arguments), determine whether the following set is convex.

$$\{(x, y): xy \geq 1\}. \quad (7+3)$$

- (क) प्रतिस्पर्धी बाजार में, एक फर्म कार्य के अनुसार अच्छी Q का उत्पादन करती है

$$Q(K, L) = 8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$$

जहां, K और L क्रमशः पूंजी और श्रम हैं। आउटपुट के लिए रु. 5 और इनपुट के लिए रु. 2 और रु. 10 की एकात्मक कीमतों को देखते हुए, K और L के दृष्टतम मान ज्ञात करें जो लाभ π को अधिकतम करते हैं। साथ ही, अधिकतम लाभ, π की गणना करें।

(ख) आरेख स्वीचकर (या सटीक बीजगणितीय तर्क बनाकर), यह निर्धारित करें कि निम्नलिखित सेट उत्तल है या नहीं।

$$\{(x, y): xy \geq 1\}.$$

[This question paper contains 32 printed pages.]



Sr. No. of Question Paper : 5239

Unique Paper Code : 2272101203

Name of the Paper : Intermediate Statistics for Economics

Name of the Course : B.A. (H) Economics DSC

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. All questions within each section are to be answered in a contiguous manner on the answer sheet. Start each question on a new page, and all subparts of a question should follow one after the other.
3. All intermediate calculations should be rounded off to 3 decimal places. The values provided in statistical tables should not be rounded off. All final calculations should be rounded off to two decimal places.
4. The use of a simple non-programmable calculator is allowed.
5. Statistical tables are attached for your reference.
6. In all calculations, figures should be rounded to two decimal places.
7. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. प्रत्येक खंड के सभी प्रश्नों के उत्तर पत्रक पर सन्निहित तरीके से दीजिये। प्रत्येक प्रश्न को एक नए पृष्ठ पर प्रारंभ कीजिये, और एक प्रश्न के सभी उपभागों को एक के बाद एक अनुसरण कीजिये।
3. सभी मध्यवर्ती गणनाओं को 3 दशमलव स्थानों तक पूर्णांकित किया जाना चाहिए। सार्वव्यकीय तालिकाओं में प्रदान किए गए मानों को गोल नहीं किया जाना चाहिए। सभी अंतिम गणनाओं को दो दशमलव स्थानों तक पूर्णांकित किया जाना चाहिए।

4. एक साधारण गैर-प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।
5. सांख्यिकीय टेबल आपके संदर्भ के लिए संलग्न हैं।
6. सभी गणनाओं में, आंकड़ों को दो दशमलव स्थानों पर गोल किया जाना चाहिए।
7. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

SECTION I

Do any two questions.

किन्हीं दो प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

1. (a) Suppose Y_1 , Y_2 , and Y_3 are three normally and independently distributed random variables with expected values μ_1 , μ_2 and μ_3 , and variances σ_1^2 , σ_2^2 , and σ_3^2 , respectively. If $\mu_1 = 25$, $\mu_2 = 45$, $\mu_3 = 50$, $\sigma_1^2 = 10$, $\sigma_2^2 = 15$, and $\sigma_3^2 = 20$, calculate $P(45 \leq \bar{Y} \leq 47)$ where $\bar{Y} = (Y_1 + Y_2 + Y_3)/3$.
- (b) The time taken by a randomly selected job applicant to fill out a certain form has a normal distribution with mean value 12 minutes and variance 4 minutes². If six individuals fill out a form on one day and seven on another, find the probability that the sample average amount of time taken on each day is at most 13 minutes.

(5+5)

(अ) मान लीजिए कि Y_1 , Y_2 , और Y_3 तीन सामान्य रूप से और स्वतंत्र रूप से वितरित यादृच्छिक चर हैं जिनके अपेक्षित मूल्य μ_1 , μ_2 और μ_3 हैं, और क्रमशः σ_1^2 , σ_2^2 , और σ_3^2 हैं। यदि $\mu_1 = 25$, $\mu_2 = 45$, $\mu_3 = 50$, $\sigma_1^2 = 10$, $\sigma_2^2 = 15$, और $\sigma_3^2 = 20$ हैं, तो $P(45 \leq \bar{Y} \leq 47)$ की गणना कीजिए जहाँ $\bar{Y} = (Y_1 + Y_2 + Y_3)/3$.

(ब) एक निश्चित फॉर्म को भरने के लिए यादृच्छिक रूप से चयनित नौकरी आवेदक द्वारा लिया गया समय 12 मिनट के औसत मूल्य और 4 मिनट² के विचरण के साथ एक सामान्य वितरण है। यदि एक दिन छह व्यक्ति एक फॉर्म भरते हैं और दूसरे दिन सात व्यक्ति, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक दिन लिया गया नमूना औसत समय अधिक से अधिक 13 मिनट का है।

2. Suppose a certain bike has four models (model 1, model 2, model 3, and model 4). If Y denotes a randomly selected bike purchase, then the probability mass function (pmf) of Y is given as below :

Y	1	2	3	4
$P(y)$	0.2	0.4	0.1	0.3

Suppose a random sample of two customers is selected.

(i) Obtain the sampling distribution of $\bar{Y}$.

(ii) Calculate $P(\bar{Y} \leq 1.5)$ and $P(2 \leq \bar{Y} < 3.5)$. (5+5)

मान लीजिए कि किसी बाइक के चार मॉडल हैं (मॉडल 1, मॉडल 2, मॉडल 3 और मॉडल 4) यदि Y यादृच्छिक रूप से चयनित बाइक खरीद को दर्शाता है, तो Y का प्रायिकता द्रव्यमान फलन (pmf) नीचे दिया गया है :

दो ग्राहकों के यादृच्छिक नमूने पर विचार कीजिए।

Y	1	2	3	4
$P(y)$	0.2	0.4	0.1	0.3

(i) $\bar{Y}$ का नमूना वितरण प्राप्त कीजिए।

(ii) $P(\bar{Y} \leq 1.5)$ और $P(2 \leq \bar{Y} < 3.5)$ की गणना कीजिए, जब दो ग्राहकों का एक यादृच्छिक नमूना चुना जाता है।

3. Let $Y_1, Y_2, \dots, Y_{35}$ be a random sample from a distribution with mean (μ) 7.9 and variance (σ^2) 4.2. If $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{35}$

(a) Calculate $P(277.5 \leq Y \leq 279.7)$.

(b) If the sample size changes to 32, could the probability of part (a) be calculated from the given information. If yes, find the probability and if not, why? Will your answer change if the sample size is 25 instead of 32? Explain. (5+5)

मान लीजिए कि $Y_1, Y_2, \dots, Y_{35}$ माध्य (μ) 7.9 और प्रसरण (σ^2) 4.2 वाले वितरण से एक यादृच्छिक नमूना है। यदि $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{35}$

(अ) $P(277.5 \leq Y \leq 279.7)$ की गणना कीजिए।

(ब) यदि नमूना आकार 32 में बदल जाता है, तो क्या दी गई जानकारी से भाग (ए) की संभावना की गणना की जा सकती है। यदि हाँ, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए और यदि नहीं, तो क्यों? यदि नमूना आकार 32 के बजाय 25 है तो क्या आपका उत्तर बदल जाएगा? व्याख्या कीजिए।

SECTION II

Attempt any three questions.

किन्हीं तीन प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

4. Let the fracture strengths (MPa) of ceramic bars be normally distributed with average fracture strength μ and standard deviation σ . A sample of 10 ceramic bars is found to have an average strength of 70 MPa and standard deviation (s) 2.3 MPa.
- (a) Obtain a two-sided confidence interval for true average fracture strength, when the level of significance is 1%. Which distribution would you use to obtain the critical values for the confidence interval and why?
- (b) Calculate a two-sided confidence interval for the population standard deviation when the significance level is 5%. (5+5)

सिरेमिक सलाखों की फ्रैक्चर ताकत (एमपीए) को सामान्य रूप से औसत फ्रैक्चर ताकत μ और मानक विचलन σ के साथ वितरित किया जाना चाहिए। 10 सिरामिक छड़ों के एक नमूने में औसत सामर्थ्य 70 एमपीए और मानक विचलन (s) 2.3 एमपीए पाया गया है।

- (अ) सही औसत फ्रैक्चर ताकत के लिए दो तरफा विश्वास अंतराल प्राप्त कीजिए, जब महत्व का स्तर 1% है। कॉन्फिडेंस इंटरवल के लिए महत्वपूर्ण मान प्राप्त करने के लिए आप किस वितरण का उपयोग करेंगे और क्यों?
- (ब) जनसंख्या मानक विचलन के लिए दो तरफा विश्वास अंतराल की गणना कीजिए जब महत्व स्तर 5% हो।

5. (a) Let $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ be a random sample from a uniform distribution on the interval $(\theta-1, \theta+1)$, where θ can be any finite real number. Find the moment estimator of θ . If sample size is 4 and $Y_1 = 2.7, Y_2 = 1.2, Y_3 = 3.9, Y_4 = 2.3$, find the moment estimate of θ .

(b) Let Y_1, Y_2 , and Y_3 be a random sample from a normal distribution where both population mean μ and standard deviation σ are unknown. Which of the following is an unbiased and more efficient estimator for μ ?

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3 \qquad \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2 + \frac{1}{3}Y_3 \qquad (5+5)$$

(अ) मान लीजिये $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ अंतराल $(\theta-1, \theta+1)$ पर एक समान वितरण से एक यादृच्छिक नमूना है, जहां θ कोई परिमित वास्तविक संख्या हो सकती है। θ का आघूर्ण अनुमानक ज्ञात कीजिए। यदि नमूना आकार 4 है और $Y_1 = 2.7, Y_2 = 1.2, Y_3 = 3.9, Y_4 = 2.3$ है, तो θ का आघूर्ण अनुमान ज्ञात कीजिए।

(ब) मान लीजिये Y_1, Y_2 , और Y_3 सामान्य वितरण से यादृच्छिक नमूना हैं जहां जनसंख्या औसत μ और मानक विचलन σ दोनों अज्ञात हैं। निम्नलिखित में से कोन μ के लिए एक निष्पक्ष और अधिक कुशल अनुमानक है?

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3 \qquad \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2 + \frac{1}{3}Y_3$$

6. (a) Suppose that $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a random sample with the following pdf

$$f(x; \beta) = \frac{x^3 e^{-x/\beta}}{6\beta^4} \text{ for } x \geq 0$$

Find out the Maximum Likelihood Estimators for β if a random sample of size 3 yielded the measurements 2.3, 1.9, and 4.6.

- (b) The mean of a random sample of 64 observations is 160. Assuming a population standard deviation of 10, how many additional observations are required so that the half width of the confidence interval for true population mean (μ) is 1.4 assuming a confidence level of 95%? (5+5)

(अ) मान लीजिए कि $X_1, X_2, \dots, X_n$ निम्नलिखित पीडीएफ के साथ एक यादृच्छिक नमूना है

$$f(x; \beta) = \frac{x^3 e^{-x/\beta}}{6\beta^4} \text{ for } x \geq 0$$

β के लिए अधिकतम संभावना अनुमानक खोजिये यदि आकार 3 के एक यादृच्छिक नमूने ने माप 2.3, 1.9 और 4.6 प्राप्त किए।

- (ब) 64 अवलोकनों के एक यादृच्छिक नमूने का मतलब 160 है। 10 के जनसंख्या मानक विचलन को मानते हुए, कितने अतिरिक्त अवलोकनों की आवश्यकता है ताकि वास्तविक जनसंख्या माध्य (μ) के अनुमान की त्रुटि पर बाध्यता 1.4 हो, एक विश्वास मानते हुए 95% का स्तर?

7. (a) A random sample of 700 units from a large consignment showed that 200 were damaged. Estimate the true average proportion of damaged units in the consignment in a way that conveys information about precision and reliability. (Assume 95% level of confidence)
- (b) A random sample of 10 bags of nitrogen fertilizers gives a sample mean of 40 kg and sample standard deviation of 6 kg. If the investigator surveying these bags wants to be 99% confident that the population mean weight (μ) does not exceed "d", what would "d" be? (Assume population distribution to be normal). (5+5)

- (अ) एक बड़ी खेप से 700 इकाइयों का एक यादृच्छिक नमूना दिखाता है कि 200 इकाइयाँ क्षतिग्रस्त हो गई। खेप में क्षतिग्रस्त इकाइयों के वास्तविक औसत अनुपात का इस तरह से अनुमान लगाएँ जो सटीकता और विश्वसनीयता के बारे में जानकारी देता है। (95% आत्मविश्वास का स्तर मान लीजिए)
- (ब) नाइट्रोजन उर्वरकों के 10 बैग का एक यादृच्छिक नमूना 40 किलो का नमूना माध्य और 6 किलो का नमूना मानक विचलन देता है। यदि इन बैगों का सर्वेक्षण करने वाला अन्वेषक 99% आश्वस्त होना चाहता है कि जनसंख्या माध्य भार (μ) "d" से अधिक नहीं है, तो "d" क्या होगा? (जनसंख्या वितरण को सामान्य मान लीजिए)।

Section III

Attempt any four questions.

किन्हीं चार प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

8. (a) In a certain type of discolourant, it is very important that a particular solution that is to be used as a reactant have a pH of exactly 8.20. A method for determining pH that is available for solutions of this type is known to give measurements that are normally distributed with a mean equal to the actual pH and with a standard deviation of .02. Suppose 10 independent measurements yielded the following pH values :

8.18	8.17	8.16	8.15	8.17	8.21	8.22	8.16	8.9	8.18
------	------	------	------	------	------	------	------	-----	------

- (i) Which test statistic would be used and why?
- (ii) What conclusion can be drawn at the $\alpha = .10$ level of significance using the p-value approach?

- (b) Using the 90% confidence interval, for the mean labour time (μ), following information is obtained :

N	Sample Mean	Sample Standard Deviation	90% Confidence Interval
52	1.86462	1.24992	(1.574, 2.155)

- (i) Decide whether or not to reject $H_0: \mu = 1.6$ in favour of $H_1: \mu \neq 1.6$ at $\alpha = 0.10$.

- (ii) What is your decision in part (i) if level of significance $\alpha = 0.05$?

- (iii) Based on the example what is the relationship between tests for two-sided alternatives and confidence intervals? (5+5)

(अ) एक निश्चित प्रकार के विरंजक में, यह बहुत महत्वपूर्ण है कि एक विशेष समाधान जिसे अभिकारक के रूप में उपयोग किया जाना है, उसका pH बिल्कुल 8.20 होना चाहिए। इस प्रकार के समाधान के लिए उपलब्ध pH को निर्धारित करने के लिए एक विधि को माप देने के लिए जाना जाता है जो सामान्य रूप से वास्तविक pH के बराबर माध्य और .02 के मानक विचलन के साथ वितरित किया जाता है। मान लीजिए कि 10 स्वतंत्र मापों से निम्नलिखित pH मान प्राप्त होते हैं :

8.18	8.17	8.16	8.15	8.17	8.21	8.22	8.16	8.9	8.18
------	------	------	------	------	------	------	------	-----	------

- (i) कौन से परीक्षण आँकड़ों का उपयोग किया जाएगा और क्यों?

- (ii) पी-वैल्यू दृष्टिकोण का उपयोग करके $\alpha = .10$ स्तर के महत्व पर क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

- (ब) 90% विश्वास अंतराल का उपयोग करते हुए, औसत श्रम समय (μ) के लिए, निम्नलिखित जानकारी प्राप्त की जाती है :

N	Sample Mean	Sample Standard Deviation	90% Confidence Interval
52	1.86462	1.24992	(1.574, 2.155)

(i) तय कीजिए कि $H_0: \mu = 1.6$ को अस्वीकार करना है या नहीं $H_1: \mu \neq 1.6$ के पक्ष में जब $\alpha = 0.10$ है।

(ii) भाग (i) में आपका निर्णय क्या है यदि स्तर के महत्व $\alpha = 0.05$ है?

(iii) उदाहरण के आधार पर दो तरफा विकल्पों और विश्वास अंतराल के लिए परीक्षणों के बीच क्या संबंध है?

9. (a) It is desired to test the null hypothesis $\mu = 30$ minutes against the alternative hypothesis $\mu < 30$ minutes on the basis of the time taken by a newly developed oven for $n = 50$ cakes baked. The population has $\sigma = 5$ minutes. For what values of $\bar{X}$ must the null hypothesis be rejected if the probability of a Type I error is to be $\alpha = 0.05$?
- (b) Environment experts need to be able to detect small amounts of pollutants in the environment which usually shows average lead content in the water to be 2.25 (μ g / L). However, experts express concern about spiked concentration of lead in the water. As a check on current capabilities, measurements of lead content are taken from twelve water specimens

2.4	2.9	2.7	2.6	2.9	2.0	2.8	2.2	2.4	2.4	2.0	2.5
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Is there strong enough evidence to support the concern of the experts?

Conduct the test at 0.025 level of significance.

(5+5)

- (अ) शून्य परिकल्पना $\mu = 30$ मिनट के खिलाफ वैकल्पिक परिकल्पना $\mu < 30$ मिनट का परीक्षण करने के लिए एक नए विकसित ओवन द्वारा $n = 50$ केक बेक किए जाने में लगने वाले समय के आधार पर वांछित है। जनसंख्या में $\sigma = 5$ मिनट है। यदि टाइप I त्रुटि की प्रायिकता $\alpha = 0.05$ है, तो $\bar{X}$ के किन मानों के लिए शून्य परिकल्पना को अस्वीकार किया जाना चाहिए? (5+5)

- (ब) पर्यावरण विशेषज्ञों को पर्यावरण में प्रदूषकों की थोड़ी मात्रा का पता लगाने में सक्षम होने की आवश्यकता है जो आमतौर पर पानी में औसत सीसा सामग्री $2.25 (\mu\text{g/L})$ दिखाता है। हालांकि, विशेषज्ञ पानी में लेड की मात्रा बढ़ने को लेकर चिंता जताते हैं। वर्तमान क्षमताओं की जांच के रूप में, सीसे की मात्रा का माप बारह जल नमूनों से लिया जाता है

2.4	2.9	2.7	2.6	2.9	2.0	2.8	2.2	2.4	2.4	2.0	2.5
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

क्या विशेषज्ञों की चिंता का समर्थन करने के लिए पर्याप्त पुख्ता सबूत हैं? परीक्षण को 0.025 सार्थकता स्तर पर आयोजित कीजिए।

10. (a) Breakthroughs by one research group result in the summary statistics for the stress (MPa) of synthetic silk fibers, where $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are the sample means for small and large diameter respectively and s_1 and s_2 are the respective sample standard deviations.

Small diameter $n = 7$ $\bar{x} = 123.0$ $s_1 = 15.0$

Large diameter $n = 6$ $\bar{y} = 92.0$ $s_2 = 21.0$

Use the 0.05 level of significance to test the claim that mean stress is largest for the small diameter fibers. Assume that both sampled populations have normal distributions with the same variance.

- (b) Data indicates that the variance of measurements made through stampings by experienced quality-control inspectors is $0.18 (\text{inch})^2$. Such measurements made by an inexperienced inspector could have too large a variance (perhaps because of inability to read instruments properly) or too small a variance (perhaps because unusually high or low measurements are discarded). If a new inspector measures 31 stampings with a variance of $0.13 (\text{inch})^2$, test at the 0.05 level of significance whether the inspector is making satisfactory measurements. Assume normality. (5+5)

- (अ) सिंथेटिक रेशम फाइबर के तनाव (एमपीए) के लिए सारांश आंकड़ों में एक शोध समूह द्वारा सफलताओं का परिणाम है, जहां $\bar{x}$ और $\bar{y}$ क्रमशः छोटे और बड़े व्यास के लिए नमूना साधन हैं और s_1 और s_2 संबंधित नमूना मानक विचलन हैं।

छोटा व्यास $n = 7$ $\bar{x} = 123.0$ $s_1 = 15.0$

बड़ा व्यास $n = 6$ $\bar{y} = 92.0$ $s_2 = 21.0$

इस दावे का परीक्षण करने के लिए 0.05 स्तर के महत्व का उपयोग कीजिए कि छोटे व्यास के तंतुओं के लिए औसत तनाव सबसे बड़ा है। मान लीजिए कि दोनों नमूना आबादी में समान भिन्नता के साथ सामान्य वितरण होता है।

(ब) डेटा दर्शाता है कि अनुभवी गुणवत्ता नियंत्रण निरीक्षकों द्वारा मुद्रांकन के माध्यम से किए गए मापों का अंतर 0.18 (इंच)² है। एक अनुभवहीन निरीक्षक द्वारा किए गए ऐसे मापों में बहुत बड़ा विचरण हो सकता है (शायद उपकरणों को ठीक से पढ़ने में असमर्थता के कारण) या बहुत छोटा विचरण (शायद इसलिए कि असामान्य रूप से उच्च या निम्न मापों को छोड़ दिया जाता है)। यदि एक नया निरीक्षक 0.13 (इंच)² के विचरण के साथ 31 स्टाम्पिंग को मापता है, तो 0.05 स्तर के महत्व पर परीक्षण कीजिए कि क्या निरीक्षक संतोषजनक माप कर रहा है। सामान्यता मान लीजिए।

11. (a) A research group is making great advances using a new type of anode and they claim that the mean life is greater than 1600 recharge cycles. To support this claim, they create 50 new batteries and subject them to recharge cycles until they fail. The claim will be established if the sample mean lifetime is greater than 1660 cycles. Otherwise, the claim will not be established and further improvements are needed. Let standard deviation $\sigma = 192$, and level of significance $\alpha = 0.03$. Find the dividing line of the test criterion.
- (b) Find the probability of Type II errors for the values of true population mean $\mu = 1620, 1660, 1700, 1740$ and 1760 . Also find the power of test in each case. Do you observe a relationship between alternative mean and probability of type II error? (5+5)

(अ) एक शोध समूह एक नए प्रकार के एनोड का उपयोग करके काफी प्रगति कर रहा है और उनका दावा है कि औसत जीवन 1600 रिचार्ज चक्रों से अधिक है। इस दावे का समर्थन करने के लिए, वे 50 नई बैटरी बनाते हैं और जब तक वे विफल नहीं हो जाते तब तक उन्हें रिचार्ज चक्र के अधीन रखा जाता है। यदि नमूना औसत जीवनकाल 1660 चक्रों से अधिक है तो दावा स्थापित किया जाएगा। अन्यथा, दावा स्थापित नहीं होगा और आगे सुधार की आवश्यकता है। मान लीजिए मानक विचलन $\sigma = 192$ है, और स्तर का महत्व $\alpha = 0.03$ है। परीक्षण कसौटी की विभाजक रेखा ज्ञात कीजिए।

- (ब) वास्तविक जनसंख्या का मतलब $\mu = 1620, 1660, 1700, 1740$ और 1760 के मानों के लिए टाइप II त्रुटियों की संभावना का पता लगाएं। प्रत्येक मामले में परीक्षण की शक्ति भी पाएं। क्या आप वैकल्पिक माध्य और प्रकार II त्रुटि की प्रायिकता के बीच संबंध देखते हैं?

12. (a) Incidence of Pneumonia statistics reported that 35 of 80 randomly selected cases test positive for bacterial pneumonia, whereas 66 of 80 cases tested positive for viral pneumonia. Does it appear that the true proportion of bacterial pneumonia cases differs from that for the viral pneumonia? Carry out a test of hypotheses using a significance level .01 by obtaining a p-value.
- (b) It is observed that municipal sewer pipeline networks across the country is deteriorating. One technology is proposed for pipeline rehabilitation through a tougher and flexible liner through use of chemical in the existing pipe. The following data on tensile strength (psi) of liner specimens both when a certain chemical was used and when this chemical was not used is given where $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are the sample means for and s_1 and s_2 are the respective sample standard deviations.

No chemical: $m = 10$ $\bar{x} = 2902.8$ $s_1 = 277.3$

Chemical Used: $n = 8$ $\bar{y} = 3108.1$ $s_2 = 205.9$

Does the data suggest that the standard deviation of the chemical used sample is smaller than that for no chemical sample? Carry out a test at significance level .01.

(5+5)

निमोनिया के आँकड़ों की घटना ने बताया कि 80 में से 35 चयनित मामलों में बैक्टीरियल निमोनिया के लिए सकारात्मक परीक्षण किया गया, जबकि 80 में से 66 मामलों में वायरल निमोनिया के लिए सकारात्मक परीक्षण किया गया। क्या ऐसा प्रतीत होता है कि बैक्टीरियल निमोनिया के मामलों का सही अनुपात वायरल निमोनिया के मामलों से अलग है? एक पी-वैल्यू प्राप्त करके एक महत्व स्तर .01 का उपयोग करके परिकल्पना का परीक्षण कीजिए।

(ब) यह देखा गया है कि पूरे देश में नगरपालिका सीवर पाइपलाइन नेटवर्क खराब हो रहे हैं। मौजूदा पाइप में रसायन के माध्यम से एक कठिन और लचीले लाइनर के द्वारा पाइपलाइन पुनर्वास के लिए एक तकनीक प्रस्तावित हैं। लाइनर के तन्यता ताकत (पीएसआई) पर निम्नलिखित डेटा दोनों नमूने जब एक निश्चित रसायन का उपयोग किया जाता था और जब इस रसायन का उपयोग नहीं किया जाता था दिया हुआ है जहां $\bar{x}$ और $\bar{y}$ क्रमशः नमूना साधन हैं और s_1 और s_2 संबंधित नमूना मानक विचलन हैं।

कोई रसायन नहीं : $m = 10$ $\bar{x} = 2902.8$ $s_1 = 277.3$

रासायनिक प्रयुक्त : $n = 8$ $\bar{y} = 3108.1$ $s_2 = 205.9$

क्या डेटा बताता है कि इस्तेमाल किए गए रासायनिक नमूने का मानक विचलन बिना किसी रासायनिक नमूने के मानक विचलन से छोटा है? सार्थकता स्तर .01 पर परीक्षण कीजिए।

A-2 Appendix Tables

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities
a. $n = 5$

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^x b(y; n, p)$$

	p														
	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

b. $n = 10$

	p														
	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
6	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

c. $n = 15$

	p														
	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	.998	.939	.852	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	1.000	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	1.000	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.987	.965	.794	.537	.140

(continued)

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities (cont.)

d. $n = 20$

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^x b(y; n, p)$$

	p														
	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	1.000	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.988	.878	.642	.182

(continued)

A-4 Appendix Tables

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities (cont.)

$n = 25$

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^x b(y; n, p)$$

		<i>p</i>														
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
<i>x</i>	0	.778	.277	.072	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.974	.642	.271	.027	.007	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.998	.873	.537	.098	.032	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.000	.966	.764	.234	.096	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.000	.993	.902	.421	.214	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.999	.967	.617	.378	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	.991	.780	.561	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.998	.891	.727	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.953	.851	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.983	.929	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.994	.970	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.998	.980	.956	.732	.345	.078	.006	.001	.000	.000	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.983	.846	.500	.154	.017	.003	.000	.000	.000	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.922	.655	.268	.044	.020	.002	.000	.000	.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.030	.006	.000	.000	.000
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.071	.017	.000	.000	.000
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.149	.047	.000	.000	.000
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.273	.109	.002	.000	.000
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.439	.220	.009	.000	.000
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.622	.383	.033	.001	.000
	20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.786	.579	.098	.007	.000
	21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.904	.766	.236	.034	.000
	22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.968	.902	.463	.127	.002
	23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.993	.973	.729	.358	.026
	24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.928	.723	.222

Table A.2 Cumulative Poisson Probabilities

$$F(x; \mu) = \sum_{y=0}^x \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!}$$

		<i>μ</i>									
		.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
<i>x</i>	0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
	1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
	2	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
	3		1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.987	.981
	4				1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.996
	5							1.000	1.000	1.000	.999
	6										1.000

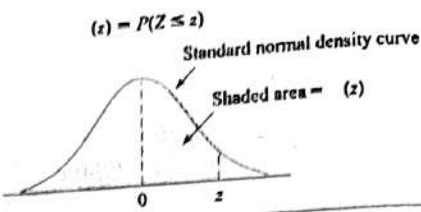
(continued)

Table A.2 Cumulative Poisson Probabilities (cont.)

$$F(x; \mu) = \sum_{y=0}^x \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!}$$

	μ										
	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	15.0	20.0
0	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000	.000	.000	.000
1	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001	.000	.000	.000
2	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006	.003	.000	.000
3	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021	.010	.000	.000
4	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055	.029	.001	.000
5	.983	.916	.785	.616	.446	.301	.191	.116	.067	.003	.000
6	.995	.966	.889	.762	.606	.450	.313	.207	.130	.008	.000
7	.999	.988	.949	.867	.744	.599	.453	.324	.220	.018	.001
8	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456	.333	.037	.002
9		.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587	.458	.070	.005
10		1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706	.583	.118	.011
11			.999	.995	.980	.947	.888	.803	.697	.185	.021
12			1.000	.998	.991	.973	.936	.876	.792	.268	.039
13				.999	.996	.987	.966	.926	.864	.363	.066
14				1.000	.999	.994	.983	.959	.917	.466	.105
15					.999	.998	.992	.978	.951	.568	.157
16					1.000	.999	.996	.989	.973	.664	.221
17						1.000	.998	.995	.986	.749	.297
18							.999	.998	.993	.819	.381
19							1.000	.999	.997	.875	.470
20								1.000	.998	.917	.559
21									.999	.947	.644
22									1.000	.967	.721
23										.981	.787
24										.989	.843
25										.994	.888
26										.997	.922
27										.998	.948
28										.999	.966
29										1.000	.978
30											.987
31											.992
32											.995
33											.997
34											.999
35											.999
36											1.000

Table A.3 Standard Normal Curve Areas



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0038
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

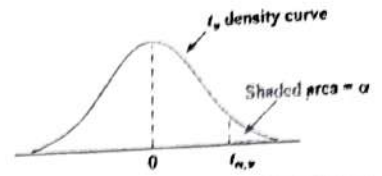
(continued)

Table A.3 Standard Normal Curve Areas (cont.)

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

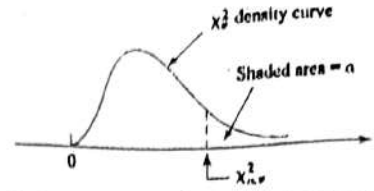
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table A.5 Critical Values for t Distributions



		α						
v		.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1		3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8		1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14		1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16		1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32		1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34		1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36		1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38		1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40		1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50		1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60		1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120		1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

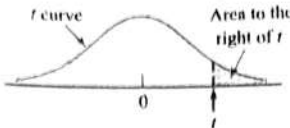
Table A.7 Critical Values for Chi-Squared Distributions



ν	α									
	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

For $\nu > 40$, $\chi^2_{\alpha, \nu} \approx \nu \left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right)^3$

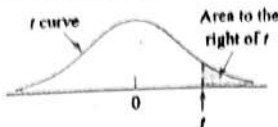
Table A.8 t Curve Tail Areas



t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.468	.465	.463	.463	.462	.462	.462	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461
0.2	.437	.430	.427	.426	.425	.424	.424	.423	.423	.423	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422
0.3	.407	.396	.392	.390	.388	.387	.386	.386	.385	.385	.385	.384	.384	.384	.384	.384	.384	.384
0.4	.379	.364	.358	.355	.353	.352	.351	.350	.349	.349	.348	.348	.348	.347	.347	.347	.347	.347
0.5	.352	.333	.326	.322	.319	.317	.316	.315	.315	.314	.313	.313	.313	.312	.312	.312	.312	.312
0.6	.328	.305	.295	.290	.287	.285	.284	.283	.282	.281	.280	.280	.279	.279	.279	.278	.278	.278
0.7	.306	.278	.267	.261	.258	.255	.253	.252	.251	.250	.249	.249	.248	.247	.247	.247	.247	.246
0.8	.285	.254	.241	.234	.230	.227	.225	.223	.222	.221	.220	.220	.219	.218	.218	.218	.217	.217
0.9	.267	.232	.217	.210	.205	.201	.199	.197	.196	.195	.194	.193	.192	.191	.191	.191	.190	.190
1.0	.250	.211	.196	.187	.182	.178	.175	.173	.172	.170	.169	.169	.168	.167	.167	.166	.166	.165
1.1	.235	.193	.176	.167	.162	.157	.154	.152	.150	.149	.147	.146	.146	.144	.144	.144	.143	.143
1.2	.221	.177	.158	.148	.142	.138	.135	.132	.130	.129	.128	.127	.126	.124	.124	.124	.123	.123
1.3	.209	.162	.142	.132	.125	.121	.117	.115	.113	.111	.110	.109	.108	.107	.107	.106	.105	.105
1.4	.197	.148	.128	.117	.110	.106	.102	.100	.098	.096	.095	.093	.092	.091	.091	.090	.090	.089
1.5	.187	.136	.115	.104	.097	.092	.089	.086	.084	.082	.081	.080	.079	.077	.077	.077	.076	.075
1.6	.178	.125	.104	.092	.085	.080	.077	.074	.072	.070	.069	.068	.067	.065	.065	.065	.064	.064
1.7	.169	.116	.094	.082	.075	.070	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.055	.054	.054	.053
1.8	.161	.107	.085	.073	.066	.061	.057	.055	.053	.051	.050	.049	.048	.046	.046	.045	.045	.044
1.9	.154	.099	.077	.065	.058	.053	.050	.047	.045	.043	.042	.041	.040	.038	.038	.038	.037	.037
2.0	.148	.092	.070	.058	.051	.046	.043	.040	.038	.037	.035	.034	.033	.032	.032	.031	.031	.030
2.1	.141	.085	.063	.052	.045	.040	.037	.034	.033	.031	.030	.029	.028	.027	.027	.026	.025	.025
2.2	.136	.079	.058	.046	.040	.035	.032	.029	.028	.026	.025	.024	.023	.022	.022	.021	.021	.021
2.3	.131	.074	.052	.041	.035	.031	.027	.025	.023	.022	.021	.020	.019	.018	.018	.018	.017	.017
2.4	.126	.069	.048	.037	.031	.027	.024	.022	.020	.019	.018	.017	.016	.015	.015	.014	.014	.014
2.5	.121	.065	.044	.033	.027	.023	.020	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.6	.117	.061	.040	.030	.024	.020	.018	.016	.014	.013	.012	.012	.011	.010	.010	.010	.009	.009
2.7	.113	.057	.037	.027	.021	.018	.015	.014	.012	.011	.010	.010	.009	.008	.008	.008	.007	.007
2.8	.109	.054	.034	.024	.019	.016	.013	.012	.010	.009	.009	.008	.008	.007	.007	.006	.006	.006
2.9	.106	.051	.031	.022	.017	.014	.011	.010	.009	.008	.007	.007	.006	.005	.005	.005	.005	.005
3.0	.102	.048	.029	.020	.015	.012	.010	.009	.007	.007	.006	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004
3.1	.099	.045	.027	.018	.013	.011	.009	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
3.2	.096	.043	.025	.016	.012	.009	.008	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.002
3.3	.094	.040	.023	.015	.011	.008	.007	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002
3.4	.091	.038	.021	.014	.010	.007	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001
3.5	.089	.036	.020	.012	.009	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.6	.086	.035	.018	.011	.008	.006	.004	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.7	.084	.033	.017	.010	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.8	.082	.031	.016	.010	.006	.004	.003	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.9	.080	.030	.015	.009	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
4.0	.078	.029	.014	.008	.005	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000

(continued)

Table A.8 t Curve Tail Areas (cont.)



t	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	∞ (z)
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3	.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382
0.4	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6	.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.274
0.7	.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8	.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213	.212
0.9	.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0	.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1	.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2	.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3	.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4	.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.085	.085	.083	.082	.081
1.5	.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6	.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7	.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8	.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9	.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.032	.031	.030	.029
2.0	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1	.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3	.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4	.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5	.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6	.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7	.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.004	.003
2.8	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.3	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000
3.4	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000
3.6	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.7	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.8	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

A-14 Appendix Tables

Table A.9 Critical Values for F Distributions

		$\nu_1 = \text{numerator df}$									
α		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\nu_2 = \text{denominator df}$	1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
		.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
		.010	4052.20	4999.50	5403.40	5624.60	5763.60	5859.00	5928.40	5981.10	6022.50
		.001	405,284	500,000	540,379	562,500	576,405	585,937	592,873	598,144	602,284
	2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
		.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
		.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
		.001	998.50	999.00	999.17	999.25	999.30	999.33	999.36	999.37	999.39
	3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
		.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
		.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
		.001	167.03	148.50	141.11	137.10	134.58	132.85	131.58	130.62	129.86
	4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
		.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
		.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
		.001	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47
	5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
		.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
		.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
		.001	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24
	6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
		.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
		.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
		.001	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69
	7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
		.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
		.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
		.001	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33
	8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
		.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
		.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
		.001	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77
	9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
		.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
		.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
		.001	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11
	10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
		.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
		.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
		.001	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96
	11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
		.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
		.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
		.001	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12
	12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
		.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
		.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
		.001	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48

(continued)

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

ν_1 = numerator df										
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.69	62.79	63.06	63.30
241.88	243.91	245.93	248.01	249.26	250.10	251.14	251.77	252.20	253.25	254.19
6055.80	6106.30	6157.30	6208.70	6239.80	6260.60	6286.80	6302.50	6313.00	6339.40	6362.70
605,621	610,668	615,764	620,908	624,017	626,099	628,712	630,285	631,337	633,972	636,201
9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.49
19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49
99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
999.40	999.42	999.43	999.45	999.46	999.47	999.47	999.48	999.48	999.49	999.50
5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.13
8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.53
27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.35	26.32	26.22	26.14
129.25	128.32	127.37	126.42	125.84	125.45	124.96	124.66	124.47	123.97	123.53
3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.76
5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.63
14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.65	13.56	13.47
48.05	47.41	46.76	46.10	45.70	45.43	45.09	44.88	44.75	44.40	44.09
3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.12	3.11
4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.43	4.40	4.37
10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.24	9.20	9.11	9.03
26.92	26.42	25.91	25.39	25.08	24.87	24.60	24.44	24.33	24.06	23.82
2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72
4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.75	3.74	3.70	3.67
7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.09	7.06	6.97	6.89
18.41	17.99	17.56	17.12	16.85	16.67	16.44	16.31	16.21	15.98	15.77
2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.47
3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.23
6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.82	5.74	5.66
14.08	13.71	13.32	12.93	12.69	12.53	12.33	12.20	12.12	11.91	11.72
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.30
3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.93
5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	5.03	4.95	4.87
11.54	11.19	10.84	10.48	10.26	10.11	9.92	9.80	9.73	9.53	9.36
2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.21	2.18	2.16
3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.79	2.75	2.71
5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.48	4.40	4.32
9.89	9.57	9.24	8.90	8.69	8.55	8.37	8.26	8.19	8.00	7.84
2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06
2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54
4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.08	4.00	3.92
8.75	8.45	8.13	7.80	7.60	7.47	7.30	7.19	7.12	6.94	6.78
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	1.98
2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.49	2.45	2.41
4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.81	3.78	3.69	3.61
7.92	7.63	7.32	7.01	6.81	6.68	6.52	6.42	6.35	6.18	6.02
2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91
2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30
4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.54	3.45	3.37
7.29	7.00	6.71	6.40	6.22	6.09	5.93	5.83	5.76	5.59	5.44

(continued)

A-16 Appendix Tables

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

		$\nu_1 = \text{numerator df}$								
α		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu_2 = \text{denominator df}$	13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20
		.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77
		.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30
		.001	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21
	14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15
		.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70
		.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14
		.001	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80
	15	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12
		.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64
		.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00
		.001	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47
	16	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09
		.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59
		.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89
		.001	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19
	17	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06
		.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55
		.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79
		.001	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96
	18	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04
		.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51
		.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71
		.001	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76
	19	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02
		.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48
		.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63
		.001	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59
	20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00
		.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45
		.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56
		.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44
	21	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98
		.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42
		.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51
		.001	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31
	22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97
		.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40
		.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45
		.001	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19
	23	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95
		.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37
		.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41
		.001	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09
	24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94
		.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36
		.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36
		.001	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99

(continued)

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

ν_1 = numerator df										
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.85
2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.21
4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.34	3.25	3.18
6.80	6.52	6.23	5.93	5.75	5.63	5.47	5.37	5.30	5.14	4.99
2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.80
2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.22	2.18	2.14
3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.18	3.09	3.02
6.40	6.13	5.85	5.56	5.38	5.25	5.10	5.00	4.94	4.77	4.62
2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.76
2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.16	2.11	2.07
3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	3.05	2.96	2.88
6.08	5.81	5.54	5.25	5.07	4.95	4.80	4.70	4.64	4.47	4.33
2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.78	1.75	1.72
2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.11	2.06	2.02
3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.93	2.84	2.76
5.81	5.55	5.27	4.99	4.82	4.70	4.54	4.45	4.39	4.23	4.08
2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.75	1.72	1.69
2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.06	2.01	1.97
3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.83	2.75	2.66
5.58	5.32	5.05	4.78	4.60	4.48	4.33	4.24	4.18	4.02	3.87
1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.72	1.69	1.66
2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92
3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.75	2.66	2.58
5.39	5.13	4.87	4.59	4.42	4.30	4.15	4.06	4.00	3.84	3.69
1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.93	1.88
3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.67	2.58	2.50
5.22	4.97	4.70	4.43	4.26	4.14	3.99	3.90	3.84	3.68	3.53
1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.68	1.64	1.61
2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.95	1.90	1.85
3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.61	2.52	2.43
5.08	4.82	4.56	4.29	4.12	4.00	3.86	3.77	3.70	3.54	3.40
1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.62	1.59
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.92	1.87	1.82
3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.58	2.55	2.46	2.37
4.95	4.70	4.44	4.17	4.00	3.88	3.74	3.64	3.58	3.42	3.28
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.60	1.57
2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.89	1.84	1.79
3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.50	2.40	2.32
4.83	4.58	4.33	4.06	3.89	3.78	3.63	3.54	3.48	3.32	3.17
1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.62	1.59	1.55
2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.86	1.81	1.76
3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.45	2.35	2.27
4.73	4.48	4.23	3.96	3.79	3.68	3.53	3.44	3.38	3.22	3.08
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.57	1.54
2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.84	1.79	1.74
3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.40	2.31	2.22
4.64	4.39	4.14	3.87	3.71	3.59	3.45	3.36	3.29	3.14	2.99

(continued)

A-18 Appendix Tables

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

Table A.2		F Distributions (cont.)									
		$r_1 = \text{numerator df}$									
α		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
25	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	
	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	
	.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71	
		.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
		.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
		.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
		.001	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64
		.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
		.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
		.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
		.001	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57
26		.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
		.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
		.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
		.001	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50
		.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
		.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
		.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
		.001	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45
		.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
		.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
		.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
		.001	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
30		.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
		.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
		.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
		.001	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02
		.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76
		.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
		.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
		.001	12.22	7.96	6.34	5.46	4.90	4.51	4.22	4.00	3.82
		.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
		.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
		.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
		.001	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
40		.100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69
		.050	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
		.010	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
		.001	11.50	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.44
		.100	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66
		.050	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
		.010	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
		.001	11.15	7.15	5.63	4.81	4.29	3.92	3.65	3.43	3.26
		.100	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64
		.050	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
		.010	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
		.001	10.89	6.96	5.46	4.65	4.14	3.78	3.51	3.30	3.13

(continued)

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

ν_1 = numerator df										
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.59	1.56	1.52
2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.82	1.77	1.72
3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.36	2.27	2.18
4.56	4.31	4.06	3.79	3.63	3.52	3.37	3.28	3.22	3.06	2.91
1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.58	1.54	1.51
2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.80	1.75	1.70
3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.33	2.23	2.14
4.48	4.24	3.99	3.72	3.56	3.44	3.30	3.21	3.15	2.99	2.84
1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.57	1.53	1.50
2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.79	1.73	1.68
3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.29	2.20	2.11
4.41	4.17	3.92	3.66	3.49	3.38	3.23	3.14	3.08	2.92	2.78
1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.56	1.52	1.48
2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.71	1.66
3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.26	2.17	2.08
4.35	4.11	3.86	3.60	3.43	3.32	3.18	3.09	3.02	2.86	2.72
1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.55	1.51	1.47
2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.75	1.70	1.65
3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.23	2.14	2.05
4.29	4.05	3.80	3.54	3.38	3.27	3.12	3.03	2.97	2.81	2.66
1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.54	1.50	1.46
2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.63
2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.25	2.21	2.11	2.02
4.24	4.00	3.75	3.49	3.33	3.22	3.07	2.98	2.92	2.76	2.61
1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.42	1.38
2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.64	1.58	1.52
2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	2.02	1.92	1.82
3.87	3.64	3.40	3.14	2.98	2.87	2.73	2.64	2.57	2.41	2.25
1.73	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.42	1.38	1.33
2.03	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.58	1.51	1.45
2.70	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.91	1.80	1.70
3.67	3.44	3.20	2.95	2.79	2.68	2.53	2.44	2.38	2.21	2.05
1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.40	1.35	1.30
1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.53	1.47	1.40
2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.84	1.73	1.62
3.54	3.32	3.08	2.83	2.67	2.55	2.41	2.32	2.25	2.08	1.92
1.66	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.34	1.28	1.22
1.93	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.45	1.38	1.30
2.50	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.69	1.57	1.45
3.30	3.07	2.84	2.59	2.43	2.32	2.17	2.08	2.01	1.83	1.64
1.63	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.29	1.23	1.16
1.88	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.39	1.30	1.21
2.41	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.58	1.45	1.30
3.12	2.90	2.67	2.42	2.26	2.15	2.00	1.90	1.83	1.64	1.43
1.61	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.25	1.18	1.08
1.84	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.33	1.24	1.11
2.34	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.50	1.35	1.16
2.99	2.77	2.54	2.30	2.14	2.02	1.87	1.77	1.69	1.49	1.22

A-20 Appendix Tables

Table A.10 Critical Values for Studentized Range Distributions

m												
v	α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32
	.01	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18
	.01	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18
9	.05	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71
	.01	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61
	.01	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40
	.01	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35
	.01	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10
	.01	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11
30	.05	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81
	.01	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60
120	.05	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44
	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29

06/06/2024

(5500)