

[This question paper contains 16 printed pages.]

(3)

Your Roll No. 2022

Sr. No. of Question Paper : 780

B

Unique Paper Code : 12271201

Name of the Paper : Introductory Macroeconomics

Name of the Course : B.A. (H) Economics

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

Deshbandhu College Library
Kalkaji, New Delhi-19

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

P.T.O.

1. (a) Briefly explain the "uses of private savings" in the economy. (4)

(b) A bond promises to pay 600 in one year

(i) What is the interest rate on the bond if its price today is 400?

(ii) If interest rate is 10%, what would be the price of bond today? (4)

(c) Using IS-LM model, show the impact of investment subsidy to the economy. How will it affect interest rate, income & investment in the economy? How is it different from expansionary fiscal policy? (7)

(अ) अर्थव्यवस्था में "निजी बचत के उपयोग" को संक्षेप में समझाएं।

(ब) एक बांड एक वर्ष में 600 का भुगतान करने का वादा करता है।

(i) बांड पर ब्याज दर क्या है यदि इसकी कीमत आज 400 है?

(ii) यदि ब्याज दर 40% है, तो आज बांड की कीमत क्या होगी?

(स) IS-LM मॉडल का प्रयोग करते हुए, अर्थव्यवस्था पर निवेश सब्सिडी के प्रभाव को दिखाएं। यह अर्थव्यवस्था में ब्याज दर, आय और निवेश को कैसे प्रभावित करेगा? यह विस्तारवादी राजकोषीय नीति से किस प्रकार भिन्न है?

2. (a) Given the following information : (5)

Investment (I)	=	50
Government Purchases (G)	=	40
GNP	=	500
CA Balance	=	-20
Tax (T)	=	100
Transfer Payment (TR)	=	30
Interest Payment on government debt	=	20
Net Factor payments from abroad	=	-5

Compute :

(i) GDP

(ii) Net Export

(iii) Consumption

(iv) Private Savings

(v) Government Savings

(b) "Seigniorage is first an increasing function then a decreasing function of nominal money growth". Do you agree? Explain. (4)

(c) What is full employment budget surplus? How is it different from actual employment budget surplus? How does a decrease in MPC affect the budget surplus? (4)

(d) "An increase in Government spending by \$10 leads to fall in the budget surplus exactly by \$10", is this statement is true or false. Explain. (2)

(अ) निम्नलिखित जानकारी को देखते हुए :

निवेश (I)	=	50
सरकारी खरीद (G)	=	40
जीएनपी (GNP)	=	500
चालू खाता शेष	=	-20
कर (T)	=	100
स्थानांतरण भुगतान (TR)	=	30
सरकारी ऋण पर ब्याज भुगतान	=	20
विदेश से शुद्ध कारक भुगतान	=	-5

गणना कीजिये :

(i) सकल घरेलू उत्पाद

(ii) शुद्ध निर्यात

(iii) उपभोग

(iv) निजी बचत

(v) सरकारी बचत

(ब) "Seigniorage पहले एक बढ़ता हुआ कार्य है फिर नाममात्र धन वृद्धि का घटता कार्य"। क्या आप सहमत हैं? समझाइये।

(स) पूर्ण रोजगार बजट अधिशेष क्या है? यह वास्तविक रोजगार बजट अधिशेष से किस प्रकार भिन्न है? एमपीसी में कमी बजट अधिशेष को कैसे प्रभावित करती है?

(द) "सरकारी खर्च में \$10 की वृद्धि से बजट अधिशेष में \$10 की कमी आती है", यह कथन सही है या गलत है। समझाइये।

3. (a) India issues 10,000 cr. debt forgiveness to one of its neighbouring country. How is this transaction accounted for in the balance of payments of India.

(3)

(b) How does hyperinflation affect economic activity of a country?

(5)

(c) What do you understand by Policy mix? In an economy, illustrate the effects of a policy mix on equilibrium output and interest rate. How the monetary accommodation of fiscal expansion leaves the interest rate unchanged as the level of output rises? Explain.

(7)

(अ) भारत 10,000 करोड़ जारी करता है। अपने पड़ोसी देश में से एक को कर्ज माफी। भारत के भुगतान संतुलन में इस लेन-देन का लेखा-जोखा कैसे किया जाता है।

(ब) अति मुद्रास्फीति किसी देश की आर्थिक गतिविधि को कैसे प्रभावित करती है?

(स) नीति मिश्रण से आप क्या समझते हैं? एक अर्थव्यवस्था में, संतुलन उत्पादन और ब्याज दर पर नीति मिश्रण के प्रभावों का वर्णन करें। जैसे-जैसे उत्पादन का स्तर बढ़ता है, राजकोषीय विस्तार का मौद्रिक समायोजन ब्याज दर को अपरिवर्तित कैसे छोड़ता है? समझाइये।

4. (a) What is GDP deflator? How is it different from CPI deflator? How does CPI inflation overstate the cost of living?

(4)

(b) What is the demand for Central bank money? Using appropriate diagram explain the equilibrium in the market for central bank money. How does a decrease in the supply of central bank money affect its equilibrium?

(5)

(c) Given : $C = 0.8(1-t) Y$

$$t = 0.25$$

$$I = 900 - 20i$$

$$G = 800$$

$$L = 0.25Y - 50i$$

$$M/P = 500$$

Find

(i) Find equilibrium level of income & Consumption.

(ii) Calculate budget surplus at equilibrium.

(iii) If govt. spending increases by 200 how much would be the new level of private spending. (6)

(अ) GDP डिफ्लेटर क्या है? यह CPI डिफ्लेटर से किस प्रकार भिन्न है? सीपीआई मुद्रास्फीति जीवन यापन की लागत को कैसे बढ़ा देती है?

(ब) केंद्रीय बैंक के पैसे की मांग क्या है? उपयुक्त आरेख का प्रयोग करते हुए केंद्रीय बैंक मुद्रा के लिए बाजार में संतुलन की व्याख्या कीजिए। केंद्रीय बैंक के पैसे की आपूर्ति में कमी उसके संतुलन को कैसे प्रभावित करती है?

(स) दिया गया है :

$$C = 0.8(1-t) Y$$

$$t = 0.25$$

$$I = 900 - 20i$$

$$G = 800$$

$$L = 0.25Y - 50i$$

$$M/P = 500$$

गणना कीजिये :

(i) आय और उपभोग का संतुलन स्तर ज्ञात कीजिए।

(ii) संतुलन पर बजट अधिशेष की गणना करें।

(iii) अगर सरकार। खर्च 200 से बढ़ता है, निजी खर्च का नया स्तर कितना होगा।

5. (a) Consider an economy whose real GDP is 5000 in time period 1 and 6000 in time period 2. The GDP deflator for the same economy is 105 in time period 1 and 120 in time period 2.

(i) What is the nominal GDP in time period 1 and 2?

(ii) What is the rate of inflation in time period 2?

(iii) If the real rate of interest in time period 2 is 4%, what is the nominal rate of interest in time period 2? (3)

(b) Why is central Bank money is also called High Powered Money? Explain using the concept of multiplier. Assuming that money multiplier is 7 and overall supply of money is 35000, what will be the central bank money? (5)

(c) Explain the relationship between effectiveness of monetary policy & interest elasticity of money demand using diagram. (4)

(d) Assume a model of the expenditure sector with no govt sector. If the savings function is defined as $S = -400 + 0.2y$, and the autonomous investment increases by 200, by how much will consumption increases? (3)

(अ) एक ऐसी अर्थव्यवस्था पर विचार करें जिसकी वास्तविक जीडीपी समय अवधि 1 में 5000 और समय अवधि 2 में 6000 है। उसी अर्थव्यवस्था के लिए जीडीपी डिफ्लेटर समय अवधि 1 में 105 और समय अवधि 2 में 120 है।

(i) समय अवधि 1 और 2 में नाममात्र सकल घरेलू उत्पाद क्या है?

(ii) समय अवधि 2 में मुद्रास्फीति की दर क्या है?

(iii) यदि समय अवधि 2 में वास्तविक ब्याज दर 4% है, तो समय अवधि 2 में ब्याज की नाममात्र दर क्या है?

(ब) केंद्रीय बैंक के पैसे को हाई पावर्ड मनी क्यों कहा जाता है? गुणक की अवधारणा का प्रयोग करते हुए समझाइए। यह मानते हुए कि मुद्रा गुणक 7 है और मुद्रा की कुल आपूर्ति 35000 है, केंद्रीय बैंक की मुद्रा क्या होगी?

(स) मौद्रिक नीति की प्रभावशीलता और मुद्रा की मांग की ब्याज लोच के बीच संबंध को आरेख का उपयोग करके स्पष्ट करें।

(द) बिना सरकारी क्षेत्र वाले व्यय क्षेत्र का एक मॉडल मान लें। यदि बचत फलन को $S = -400 + 0.2y$ के रूप में परिभाषित किया जाता है, और स्वायत्त निवेश में 200 की वृद्धि होती है, तो खपत में कितनी वृद्धि होगी?

6. (a) Differentiate between intermediate and final goods. Under which category are Capital Goods and inventory investment included and why?

(3)

(b) Suppose that money demand is given by $M^d = Y$ (0.25-i) where income is 100 cr. And supply of

money is 20 cr. Assume equilibrium in money market

(i) What is the interest rate?

(ii) If central bank increases interest rate by 5%, what should be the level of money supply for the money market to be in equilibrium. (5)

(c) Examine the impact of a contractionary fiscal policy on output & interest rate under two assumptions :

(i) Interest rates are kept constant

(ii) Money stock is kept constant (7)

(अ) मध्यवर्ती और अंतिम माल के बीच अंतर। कैपिटल गुड्स और इन्वेंट्री निवेश को किस श्रेणी में शामिल किया गया है और क्यों?

(ब) मान लीजिए कि पैसे की मांग एमडी = वाई (0.25-i) द्वारा दी गई है जहां आय 100 करोड़ है। और पैसे की आपूर्ति 20 करोड़ है। मुद्रा बाजार में संतुलन मानिए

(i) ब्याज दर क्या है?

(ii) यदि केंद्रीय बैंक ब्याज दर में 5% की वृद्धि करता है, तो मुद्रा बाजार के संतुलन में रहने के लिए मुद्रा आपूर्ति का स्तर क्या होना चाहिए।

(स) दो मान्यताओं के तहत उत्पादन और ब्याज दर पर एक संकुचन राजकोषीय नीति के प्रभाव की जांच करें:

(i) ब्याज दरों को स्थिर रखा जाता है

(ii) मनी स्टॉक स्थिर रखा जाता है

7. (a) A factory owner purchased 5 new machines at Rs. 30,000 each. He sold his old ones for Rs. 60,000. What is the net impact of these transaction on GDP? (2)

(b) What determine output and employment in the classical system? What role does the aggregate demand have in determining output, employment and price level? (7)

(c) Explain how each of the following events affect monetary base, money multiplier and money supply.

(i) Central bank follows expansionary open market operations.

(ii) If there is an increase in the amount of money that people hold as currency rather than deposits. (6)

(अ) एक कारखाने के मालिक ने 30,000 रुपये प्रत्येक पर 5 नई मशीनें खरीदीं। उसने अपने पुराने लोगों को 60,000 रुपये में बेच दिया। सकल घरेलू उत्पाद पर इन लेनदेन का शुद्ध प्रभाव क्या है?

(ब) शास्त्रीय प्रणाली में उत्पादन और रोजगार क्या निर्धारित करते हैं? उत्पादन, रोजगार और मूल्य स्तर निर्धारित करते में कुल मांग की क्या भूमिका है?

(स) बताएं कि निम्नलिखित में से प्रत्येक घटना मौद्रिक आधार, धन गुणक और मुद्रा आपूर्ति को कैसे प्रभावित करती है।

- (i) सेंट्रल बैंक विस्तारवादी खुले बाजार के संचालन का अनुसरण करता है।
- (ii) यदि लोगों के पास जमा राशि के बजाय मुद्रा के रूप में रखी गई राशि में वृद्धि होती है।

Dashbandhu College Library
Kalkaji, New Delhi-19

[This question paper contains 20 printed pages.]

(4)

Your Roll No. 2022

Sr. No. of Question Paper : 806

B

Unique Paper Code : 12271202

Name of the Paper : Mathematical Methods for
Economics II

Name of the Course : **BA (Hons.) Economics**

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Deshbandhu College Library
Kalkaji, New Delhi-10

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are 4 questions in all. **All** questions are compulsory.
3. All parts of a question must be answered together.
4. Use of a simple calculator is allowed.
5. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

P.T.O.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. कुल चार प्रश्न हैं। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को एक ही स्थान पर हल कीजिये।
4. साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।
5. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. Attempt any **four** of the following : (6×4=24)

- (a) (i) Let $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$ and $K = 0.2t + 5$ and $L = 5e^{0.1t}$. Express the rate of change of Y as a weighted sum of the relative rates of change of K and L . Can you attach any economic significance to the weights?

(ii) Let $r = r(x, y)$, $x = x(s, t)$ and $y = y(s, t)$. Given that

$$x(1, 0) = 2, \quad x'_1(1, 0) = -1, \quad x'_2(1, 0) = 7,$$

$$y(0) = 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 4$$

$$r(2, 3) = -1, \quad r'_1(2, 3) = 3, \quad r'_2(2, 3) = 5$$

$$r'_1(1, 0) = 6, \quad r'_2(1, 0) = -2$$

Calculate $\frac{\partial r}{\partial t}$ at $s = 1, t = 0$.

(b) Given $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

(i) At $(1, 0)$, in what direction does f increase most rapidly? What is the rate of change in f in that direction?

(ii) Find an approximate value for $f(1.01, 0.02)$. How large is the error caused by this approximation?

(c) (i) Given $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n$. Is f homogenous? Is it homothetic? Are the first order partial derivatives of the function homogenous and if yes of what degree? Show

$$\text{that } \nabla f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right).$$

(ii) Suppose that $f(x, y)$ is homogenous of degree 2 with $f'_1(2, 3) = 4$ and $f'_2(4, 6) = 12$. Find $f(6, 9)$.

- (d) The following system of equations defines $u = u(x, y)$ and $v = v(x, y)$ as differentiable functions of x and y around the point $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 0)$:

$$(u + 2v)^5 + xy^2 = 2u - yv$$

$$(1 + u^2)^3 - z^2v = 8x + y^5w^2$$

Differentiate the system and find the values of u'_x , u'_y , v'_x and v'_y .

- (e) (i) For the function, $f(x, y, z) = \frac{zx}{(x + y^2)}$,

determine whether the function f increases or decreases at a specified point $P_0 = (1, 1, 1)$ when one variable increases, while the others are fixed.

- (ii) Assume that the equation $e^{xy^2} - 2x - 4y = c$ implicitly defines y as a differentiable function of x . Find a value of the constant c such that $f(0) = 1$ and find the slope and the equation of the tangent at the point $(x, y) = (0, 1)$.

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिये :

- (क) (i) मान लीजिये $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$ तथा $K = 0.2t + 5$ और $L = 5e^{0.1t}$. Y में परिवर्तन की दर को K और L की परिवर्तन की सापेक्ष दरों के भारित योग के रूप में व्यक्त करें। क्या आप इसके लिए कोई आर्थिक महत्त्व दिखा सकते हैं?

- (ii) माना कि $r = r(x, y)$, $x = x(s, t)$ तथा $y = y(t)$ । दिया हुआ है :

$$x(1, 0) = 2, \quad x'_1(1, 0) = -1, \quad x'_2(1, 0) = 7,$$

$$y(0) = 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 4$$

$$r(2, 3) = -1, \quad r'_1(2, 3) = 3, \quad r'_2(2, 3) = 5$$

$$r'_1(1, 0) = 6, \quad r'_2(1, 0) = -2$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} \text{ at } s = 1, t = 0 \text{ की गणना कीजिये।}$$

$$(ख) आपको दिया गया फलन: $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ।$$

- (i) फलन f सबसे तेजी से $(1, 0)$ पर किस दिशा में बढ़ता है? उस दिशा में f में परिवर्तन की दर क्या है?

(ii) $f(1.01, 0.02)$ के लिए अनुमानित मान ज्ञात कीजिये।

इस समीकरण के कारण हुई त्रुटि कितनी बड़ी है?

(ग) (i) दिया गया $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n$ क्या f समरूप (होमोजीनियस) है? क्या ये समरूप (होमोथेटिक) है? क्या f के प्रथम कोटि आंशिक अवकलज (पार्शियल डेरिवेटिव्स) सजातीय फलन (होमोजीनियस फंक्शन) हैं और यदि हाँ तो किस अंश (डिग्री) के हैं?

$$\nabla f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right) \text{ दिखाएँ।}$$

(ii) मान लीजिये कि $f(x, y)$ डिग्री 2 का समरूप है तथा

$$f'_1(2, 3) = 4 \text{ और } f'_2(4, 6) = 12 \text{ तो } f(6, 9) \text{ ज्ञात करें।}$$

(घ) निम्नलिखित समीकरणों की प्रणाली $u = u(x, y)$ और $v = v(x, y)$ जो कि बिंदु $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 0)$ के आसपास x और y के अवकलनीय (डिफ्रेंशियेबल) फलन के रूप में परिभाषित करती है।

$$(u + 2v)^5 + xy^2 = 2u - yv$$

$$(1 + u^2)^3 - z^2v = 8x + y^5w^2$$

प्रणाली को डिफ्रेंशियेट करें तथा u'_x , u'_y , v'_x तथा v'_y का मान ज्ञात करें।

(ङ) (i) दिए गए फलन $f(x, y, z) = \frac{zx}{(x + y^2)}$, के लिए निर्धारित

करें कि फलन एक निर्दिष्ट बिंदु $P_0 = (1, 1, 1)$ पर बढ़ता है या घटता है, जब एक चर बढ़ता है, जबकि अन्य स्थिर होते हैं।

(ii) माना कि समीकरण $e^{xy^2} - 2x - 4y = c$ परोक्ष (इम्प्लिसिटली)

रूप से y को x के एक अवकलनीय (डिफ्रेंशियेबल) फलन के रूप में परिभाषित करता है। जब $f(0) = 1$ दिया हुआ है तो स्थिरांक c का मान ज्ञात कीजिये तथा बिंदु $(x, y) = (0, 1)$ पर स्पर्शरेखा (टैनजेंट) का ढलान (स्लोप) और समीकरण ज्ञात कीजिये।

2. Attempt any four of the following : (7×4=28)

(a) Consider the function $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$.

Find and classify its critical points. Find the domain S where f is concave and find the largest value of f in S .

(b) State the necessary conditions for the solution of

the utility maximization problem, $U(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ for general values of p_x , p_y and M . Find the optimal values of x , y and the corresponding value of λ (the langrange multiplier). What are the consumer's demand functions for x and y ? Find the indirect utility function $U^*(p_x, p_y, M)$ and verify that

$$\lambda = \frac{\partial U^*}{\partial M}.$$

(c) Find the extreme points and extreme values for $f(x, y) = xe^y - x^2 - e^y$ on the domain defined by $0 \leq x \leq 2$ and $0 \leq y \leq 1$.

(d) The function $f(x, y)$ is such that

$$\text{Firstly, } f'_x > 0, f'_y > 0;$$

$$\text{Secondly, } f''_{xx} < 0, f''_{yy} < 0; \text{ and}$$

Thirdly the level curve $y = g(x)$ is defined implicitly by $f(x, y) = c$ where c is a constant. The function f is such that all level curves are strictly convex.

Let F be a differentiable and strictly increasing function of one variable. Which of the above mentioned three properties are preserved for the function $W(x, y) = F(f(x, y))$?

(e) Let $f(x, y) = (x^2 - \alpha xy)e^y$ be a function of two variables with α as a constant and $\alpha \neq 0$.

(i) Find the critical points of f and decide for each of them if it is a local maximum point, local minimum point or a saddle point.

(ii) Let (x^*, y^*) be the critical point where $x^* \neq 0$ and let $f^*(\alpha) = f(x^*, y^*)$. Find

$$\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha} \text{ and show that if we define}$$

$$\hat{f}(x, y, \alpha) = (x^2 - \alpha xy)e^y \text{ then } \frac{\partial \hat{f}(x^*, y^*, \alpha)}{\partial \alpha} =$$

$$\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha}.$$

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिये :

(क) दिए गए फलन (फंक्शन) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ के महत्वपूर्ण बिन्दुओं को खोजें और वर्गीकृत करें। डोमेन S ज्ञात कीजिये जहाँ f अवतल है। S डोमेन में f का सबसे बड़ा मान ज्ञात कीजिये।

(ख) उपयोगिता अधिकतमकरण समस्या (मैक्सीमाइज प्रॉब्लम)

$U(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ के समाधान के लिए आवश्यक शर्तें बताएं, p_x , p_y और M के सामान्य मूल्यों के लिए। x , y के अधिकतम मान और λ (लैंगरेंज मल्टीप्लायर) के संगत मान का पता लगाएं। x और y के लिए उपभोक्ता की मांग का फलन क्या है? अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन $U^*(p_x, p_y, M)$ ज्ञात कीजिये

तथा सत्यापित कीजिये कि $\lambda = \frac{\partial U^*}{\partial M}$ ।

(ग) दिए गए फलन $f(x, y) = xe^y - x^2 - e^y$ के लिए चरम बिंदु और चरम मान खोजें जब पारस (डोमेन) $0 \leq x \leq 2$ और $0 \leq y \leq 1$ दिया गया है।

(घ) दिया गया फलन $f(x, y)$ इस प्रकार है :

प्रथमतः $f'_x > 0$, $f'_y > 0$;

उसके बाद, $f''_{xx} < 0$, $f''_{yy} < 0$; तथा

अंततः $y = g(x)$ को $f(x, y) = c$ द्वारा परोक्ष रूप से परिभाषित किया गया है जहाँ c एक स्थिरांक है। दिए गए फलन f के सभी वक्र स्तर पूर्णरूप से उत्तर हैं।

मान लीजिए F एक अवकलनीय और एक चर का पूर्णरूप से बढ़ता हुआ फलन है। उपरोक्त तीनों गुणों में से कौन-सा गुण दिए गए फलन $W(x, y) = F(f(x, y))$ के लिए संरक्षित हैं ?

(ङ) मान लीजिए दो चर का एक फलन $f(x, y) = (x^2 - \alpha xy)e^y$ दिया गया है जिसमें α स्थिर है तथा $\alpha \neq 0$:

(i) दिए गए फलन f के क्रिटिकल बिंदु ज्ञात कीजिए और उसमें से प्रत्येक के लिए निर्णय कीजिए कि क्या यह बिंदु स्थानीय अधिकतम बिंदु, स्थानीय न्यूनतम बिंदु या सैडल बिंदु है।

(ii) मान लीजिये (x^*, y^*) क्रिटिकल बिंदु हैं जहाँ $x^* \neq 0$

और माना कि $f^*(\alpha) = f(x^*, y^*)$ है। $\frac{df^*}{d\alpha}(\alpha)$

ज्ञात कीजिए और दिखाएँ यदि हम

$\hat{f}(x, y, \alpha) = (x^2 - \alpha xy)e^y$ को परिभाषित करते हैं

तो $\frac{\partial \hat{f}(x^*, y^*, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{df^*(\alpha)}{d\alpha}$ दिखायें।

3. Attempt **any one** of the following : (7×1=7)

(a) To feed his stock a farmer can purchase two kinds of feed. The farmer has determined that the herd requires 60, 84, and 72 units of the nutritional elements A, B, and C, respectively, per day. The contents and cost of a kilogram of each of the two feeds are given in the following table :

	Nutritional Elements (units per kg)			Cost (Rs. per kg)
	A	B	C	
Feed 1	3	7	3	100
Feed 2	2	2	6	40

(i) The farmer wants to determine the least expensive way of providing an adequate diet by combining the two feeds. Set this up as a linear programming problem and find the minimal-cost diet.

(ii) Does the optimal solution change if the price of Feed 1 increases from 100 Rs per kg to 140 Rs per kg, with all other data unchanged?

(b) (i) Solve the following problem :

$$\max 3x + 4y \text{ subject to } \begin{cases} 3x + 2y \leq 6 \\ x + 4y \leq 4 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

(ii) Compute the increase in the criterion function if the first constraint changes to $3x + 2y \leq 7$.

(iii) Compute the increase in the criterion function if the second constraint changes to $x + 4y \leq 5$.

- (iv) Prove using (ii) and (iii) that if (x, y) is feasible in the original problem then the criterion function can never be larger than the optimal value of the criterion function obtained in (i).

निम्नलिखित में से किन्हीं एक का उत्तर दीजिए :

- (क) एक किसान अपने स्टॉक को भरने के लिए दो प्रकार का चारा (फीड) खरीद सकता है। किसान ने निर्धारित किया है कि पशु समूह को प्रतिदिन क्रमशः पोषक तत्वों A की 60 यूनिट, B की 84 यूनिट और C की 72 यूनिट की आवश्यकता होती है। दो प्रकार के चारे की प्रति किलोग्राम लागत और सामग्री निम्नलिखित तालिका में दी गई है :

	पोषक तत्व (यूनिट प्रति किलो)			
	A	B	C	
चारा 1	3	7	3	100
चारा 2	2	2	6	40

- (i) किसान दो चारे को मिलाकर पर्याप्त आहार प्रदान करने का सबसे कम खर्चीला तरीका निर्धारित करना चाहता है। इसे एक रैखिक प्रोग्रामिंग (लीनियर प्रोग्रामिंग) समस्या के रूप में दिखाएँ और न्यूनतम लागत वाला आहार (डाइट) ज्ञात करें।

- (ii) यदि चारा 1 की कीमत 100 रुपये प्रति किलोग्राम से बढ़कर 140 रुपये प्रति किलोग्राम हो जाती है और अन्य सभी डेटा अपरिवर्तित रहते हैं, तो क्या इष्टतम समाधान (ऑप्टीमल सोल्यूशन) बदलता है?

- (ख) (i) निम्नलिखित समस्या (प्रॉब्लम) का समाधान करें :

$$\text{अधिकतम (मैक्स)} \quad 3x + 4y \quad \text{यदि} \quad \begin{cases} 3x + 2y \leq 6 \\ x + 4y \leq 4 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- (ii) यदि पहली बाधा (कन्स्ट्रेंट्स) $3x + 2y \leq 7$ में बदल जाती है तो मानदंड (क्राइटेरियन) फलन में वृद्धि की गणना करें।
- (iii) यदि दूसरी बाधा (कन्स्ट्रेंट्स) $x + 4y \leq 5$ में बदल जाती है तो मानदंड (क्राइटेरियन) फलन में वृद्धि की गणना करें।

- (iv) यदि (x, y) मूल समस्या में संभव है तो मानदंड फलन (क्राइटेरियन फंक्शन) कभी भी (i) में प्राप्त मानदंड फलन (क्राइटेरियन फंक्शन) के इष्टतम मान से बड़ा नहीं हो सकता है, इसे (ii) और (iii) का उपयोग करके सिद्ध करें।

4. Attempt **any two** of the following : (8×2=16)

- (a) (i) Find the area of the region between the curves: $y_1 = 3x^2 - 6x + 8$ and $y_2 = -2x^2 + 4x + 1$ from $x = 0$ to $x = 2$.

- (ii) Show that $y(t) = 2e^{6t} + 1$ is the solution to

the differential equation $\frac{dy}{dt} = 6y - 6$ where

$y(0) = 3$. Does $y(t)$ converge to a steady state? (4,4)

- (b) (i) Let the rate of investment be given by the function, $I(t) = 12t^{1/3}$. If $K(0) = 25$, find the time path of capital stock. Find the amount of capital accumulation during the time interval $[1, 3]$.

- (ii) The demand and supply functions in the market for a commodity are given by :

$$Q_{dt} = 4 - P_t.$$

$$Q_{st} = 1 + 0.5P_{t-1}$$

Q_{dt} and Q_{st} are the quantity demanded and quantity supplied of the commodity at time t , and P_t represents the price in time period t . Find the expression for P_t in terms of P_{t-1} in the equilibrium. Solve the corresponding difference equation. Is the time path of price oscillatory/non-oscillatory and convergent/divergent? Illustrate using a graph. Consider $P_0 = 1$. (4,4)

- (c) (i) Find the general solution of the differential equation $\dot{P} = \delta[D(P) - S(P)]$ where $\delta > 0$ and $D(P) = a - bP$ gives the demand of a commodity and $S(P) = \alpha + \beta P$ gives the supply. a, b, α and β are positive constants. Determine the equilibrium state and examine whether it is stable.

(ii) Given that :

$$C_t = 90 + 0.8y_{t-1}$$

$$I_t = 50$$

$$Y_0 = 1200$$

Y_t , C_t and I_t are the national income, consumption and investment at time t . Find the time path of national income, Y_t . Comment on the stability of the time path. (4,4)

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिये :

(क) (i) वक्रों : $y_1 = 3x^2 - 6x + 8$ और $y_2 = -2x^2 + 4x + 1$ के बीच, $x = 0$ से $x = 2$, तक के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ii) सिद्ध करें कि $y(t) = 2e^{6t} + 1$ अंतर समीकरण (डिफरेंशियल

इक्वेशन) $\frac{dy}{dt} = 6y - 6$ जहाँ $y(0) = 3$ का समाधान

है। क्या $y(t)$ स्थिर (स्टेडी) अवस्था में परिवर्तित (कन्वर्ज) होता है?

(ख) (i) मान लीजिये निवेश की दर फलन (फंक्शन) $I(t) = 12t^{1/3}$ द्वारा दी गई है। यदि $K(0) = 25$ है तो पूंजी स्टॉक का समय पथ (टाइम पाथ) ज्ञात कीजिए। टाइम इंटरवल $[1, 3]$ के दौरान पूंजी संचय की मात्रा ज्ञात कीजिए।

(ii) किसी वस्तु के लिए बाजार में मांग (डिमांड) और आपूर्ति (सप्लाई) फलन दिए गए हैं :

$$Q_{dt} = 4 - P_t$$

$$Q_{st} = 1 + 0.5P_{t-1}$$

Q_{dt} और Q_{st} समय t पर वस्तु की मांग और आपूर्ति की मात्रा है, तथा P_t , वस्तु की कीमत समयावधि t में है। संतुलन में P_t के लिए व्यंजक P_{t-1} के पदों (टर्म्स) में ज्ञात कीजिए। सम्बन्धित (कोरस्पोंडिंग) अंतर समीकरण (डिफरेंस इक्वेशन) को हल कीजिए। क्या कीमत का समय पथ (टाइम पाथ) मूल्य दोलन (ओस्लेट्री) / गैर दोलन (नॉन ओस्लेट्री) और अभिसरण (कन्वेजेंट) / अपसारी (डाईवर्जेंट) है? एक ग्राफ का उपयोग करके चित्रण करें। $P_0 = 1$ पर विचार करें।

- (ग) (i) अंतर समीकरण (डिफरेंशियल इक्वेशन) $\dot{P} = \delta[D(P) - S(P)]$ का सामान्य समाधान ज्ञात करें जहाँ $\delta > 0$ तथा एक वस्तु की मांग (डिमांड) $D(P) = a - bP$ और $S(P) = \alpha + \beta P$ आपूर्ति है। a, b, α और β सकारात्मक स्थिरांक (कानस्टंट्स) हैं। संतुलित स्थिति निर्धारित करें और जांचें कि क्या वह स्थिर है।

- (ii) दिया गया है :

$$C_t = 90 + 0.8y_{t-1}$$

$$I_t = 50$$

$$Y_0 = 1200$$

Y_t, C_t और I_t समय t पर राष्ट्रीय आय, खपत और निवेश हैं। राष्ट्रीय आय Y_t का समय पथ ज्ञात कीजिये। समय पथ (टाइम पथ) की स्थिरता पर टिप्पणी कीजिए।

[This question paper contains 8 printed pages.]

⑤

Your Roll No.



Sr. No. of Question Paper : 3675

Unique Paper Code : 12271201

Name of the Paper : Introductory Macroeconomics

Name of the Course : CBCS (Economics) C-3 Core

Semester/Scheme/Mode : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. This paper consists of 7 questions. Answer any 5 questions.
3. All questions carry equal marks.
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।

P.T.O.

2. इस पत्र में 7 प्रश्न हैं। किन्हीं भी 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
3. सभी प्रश्न समान अंकों के हैं।
4. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. (a) What do you mean by balance of payments accounts? What is the fundamental balance of payments identity? Explain with examples.

(b) Define private saving. How is private saving used in the economy? What is the relationship between private saving and national saving? (7.5, 7.5)

(अ) भुगतान संतुलन खाते से आप क्या समझते हैं? भुगतान पहचान का मौलिक संतुलन क्या है? उदाहरण सहित समझाइए।

(ब) निजी बचत को परिभाषित करें। अर्थव्यवस्था में निजी बचत का उपयोग कैसे किया जाता है? निजी बचत और राष्ट्रीय बचत के बीच क्या संबंध है?

2. (a) Explain the determination of rate of interest by the demand and supply of money. What happens to the interest rate if:

(i) Nominal income increases

(ii) Money supply increases

(b) Seignorage is the real revenue from money creation. If the government chooses a constant rate of nominal money growth and maintains it forever, what would be its effect on Seignorage? (7,8)

(अ) मुद्रा की मांग और आपूर्ति द्वारा ब्याज दर के निर्धारण की व्याख्या करें। ब्याज दर का क्या होता है यदि:

(i) नाममात्र की आय में वृद्धि होती है

(ii) मुद्रा आपूर्ति बढ़ती है

(ब) धन सृजन से वास्तविक राजस्व है। यदि सरकार सांकेतिक धन वृद्धि की एक स्थिर दर चुनती है और इसे हमेशा के लिए बनाए रखती है, तो इसका (Seignorage) पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

3. (a) What are the social cost of expected and unexpected inflation?

(b) Write short note on following:

(i) High Powered Money

(ii) Quantity Theory of Money (7.8)

(अ) अपेक्षित और अप्रत्याशित मुद्रास्फीति की सामाजिक लागत क्या है?

(ब) निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें :

(i) उच्च शक्ति का धन

(ii) मुद्रा का मात्रा सिद्धांत

4. (a) Define IS curve. Explain its derivation graphically. Explain the factors causing shift in IS curve with suitable diagram.

(b) Suppose we have an economy described by the following functions :

Consumption Function, $C = 50 + 0.8Y_d$

Investment, $I = 70$

Government Spending, $G = 200$

Transfer Payments, $TR = 100$

Tax Rate, $t = 0.20$

(i) Calculate the equilibrium level of GDP and the multiplier in this model.

(ii) Calculate the budget surplus (BS).

(iii) Suppose that t increases to 0.25. What is the new equilibrium GDP and the new multiplier?

(iv) Calculate the change in the BS. Would you expect the change in the surplus to be more or less if MPC is 0.9 rather than 0.8?

(v) Can you explain why the multiplier is 1 when $t = 1$? (7,8)

(अ) IS वक्र को परिभाषित करें। इसकी व्युत्पत्ति को रेखांकन द्वारा समझाइए। उपयुक्त आरेख की सहायता से IS वक्र में बदलाव लाने वाले कारकों की व्याख्या कीजिए।

(ब) मान लीजिए कि हमारे पास निम्नलिखित कार्यों द्वारा वर्णित अर्थव्यवस्था है :

उपभोग फलन, $C = 50 + 0.8Y_d$

निवेश, $I = 70$

सरकारी खर्च, $G = 200$

स्थानांतरण भुगतान, $TR = 100$

कर दर, $T = 0.20$

(i) इस मॉडल में सकल घरेलू उत्पाद के संतुलन स्तर और गुणक की गणना करें।

(ii) बजट अधिशेष (BS) की गणना करें।

(iii) मान लीजिए कि t बढ़कर 0.25 हो जाता है। नया संतुलन GDP और नया गुणक क्या है?

(iv) बीएस में परिवर्तन की गणना करें। यदि MPC 0.8 के बजाय 0.9 है तो क्या आप अधिशेष में बदलाव की उम्मीद कम या ज्यादा करेंगे?

(v) क्या आप बता सकते हैं कि जब $t = 1$ होता है तो गुणक 1 क्यों होता है?

5. (a) What is liquidity trap? Is monetary policy effective in this case?

(b) The following equations describe an economy-

Consumption Function, $C = 0.8(i-t)Y$

Tax Rate, $t = 0.25$

Investment, $I = 900 - 50i$

Government Spending, $G = 800$

Money Demand Function, $L = 0.25Y - 62.5i$

Real Money Supply, $M/P = 500$

C, I, G etc are measured in Rs crores and i in %.

(i) Find the equation of IS curve.

(ii) Find the equation of the LM curve.

(iii) Find the equilibrium levels of output and rate of interest.

(iv) Compute monetary and fiscal policy multipliers (6,9)

(अ) लिक्विडिटी ट्रैप क्या है? क्या इस मामले में मौद्रिक नीति प्रभावी है?

(ब) निम्नलिखित समीकरण एक अर्थव्यवस्था का वर्णन करते हैं -

उपभोग फलन, $C = 0.8(i-t)Y$

कर की दर, $t = 0.25$

निवेश, $I = 900 - 50i$

सरकारी खर्च, $G = 800$

मनी डिमांड फंक्शन, $L = 0.25Y - 62.5i$

रियल मनी सप्लाई, $M/P = 500$

C, I, G आदि को करोड़ रुपये में और i को % में मापा जाता है।

(i) IS वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) LM वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(iii) उत्पादन का संतुलन स्तर और ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

(iv) मौद्रिक और राजकोषीय नीति गुणकों की गणना करें।

6. (a) Explain the determination of equilibrium level of output, employment and the real wage in the classical system.
- (b) Explain how the interest rate is determined in the Classical Theory. (8,7)
- (अ) शास्त्रीय प्रणाली में उत्पादन, रोजगार और वास्तविक मजदूरी के संतुलन स्तर के निर्धारण की व्याख्या करें।
- (ब) व्याख्या करें कि शास्त्रीय सिद्धांत में ब्याज दर कैसे निर्धारित की जाती है।
7. (a) Explain the effect of investment subsidy on equilibrium interest rate, consumption, investment, GDP. Use suitable diagrams.
- (b) Explain the important steps in the working of transmission mechanism. (9,6)
- (अ) संतुलन ब्याज दर, खपत, निवेश, जीडीपी पर निवेश सब्सिडी के प्रभाव की व्याख्या करें। उपयुक्त रेखाचित्रों का प्रयोग कीजिए।
- (ब) ट्रांसमिशन तंत्र के काम में महत्वपूर्ण चरणों की व्याख्या करें।

[This question paper contains 8 printed pages.]

(6)

Your Roll No.



Sr. No. of Question Paper : 3833

Unique Paper Code : 12271202

Name of the Paper : Mathematical Methods for
Economics – II

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are 4 questions in all.
3. All questions are compulsory.
4. All parts of a question must be answered together.
5. Use of simple calculator is allowed.

1. Attempt any **four** of the following : $(4 \times 5.5 = 22)$

(a) Examine the definiteness of the following quadratic forms :

(i) $f(x, y) = -x^2 - xy - y^2$

(ii) $-x^2 + xy - y^2$ subject to $5x - 2y = 5$

(b) Find the domain of the following functions and draw the sets in the xy plane :

(i) $f(x, y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{y}$

(ii) $g(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

[In lieu of B for PWD]

Find the domain of the following functions :

(i) $f(x, y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{y}$

(ii) $g(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

(iii) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

(c) Show that $x^2 + y^2 = 6$ is a level curve of

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 + 2$ and that all the level curves of f must be circles centered at the origin.

(d) Let $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Find : $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}$.

(e) Examine the homogeneity of the following functions :

(i) $F(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 x_2 x_3)^2}{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4}$

$$(ii) G(x_1, x_2, x_3) = (ax_1^c + bx_2^c + cx_3^c)$$

2. Attempt any **four** of the following : (4×7=28)

- (a) Suppose a monopolist is practicing price discrimination in the sale of a product by charging different prices in two separate markets. Suppose the demand curves are $P_1 = 100 - Q_1$ and $P_2 = 80 - Q_2$ and suppose the cost function is $6(Q_1 + Q_2)$. How much should be sold in the two markets to maximize profits? What are the prices charged? How much profit is lost if price discrimination is made illegal?

- (b) Use the extreme value theorem and find the extreme points and extreme values for $f(x, y)$ defined over S when

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1, S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- (c) Let the function g be given by

$$g(x, y) = x^4 y^4 + 2x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2$$

Find the stationary points of g and classify them as local maxima, local minima, global maxima, or global minima.

- (d) Examine the concavity/convexity of the following functions :

$$(i) f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$$

(ii) $f(x, y) = x - y - x^2$

(e) Maximize $U(x, y) = 100 - e^{-x} - e^{-y}$ subject to

$$px + qy = m.$$

(i) Solve for x and y as functions of p , q , and m .

(ii) Prove that x and y are homogeneous of degree 0 as functions of p , q , and m .

3. Attempt any **three** of the following : $(3 \times 6 = 18)$

(a) Show that any function $x = x(t)$ that satisfies the equation $(t - a)^2 + x^2 = a^2$ is a solution of the following differential equation :

$$2tx \frac{dx}{dt} + t^2 - x^2 = 0$$

(b) Find the area of the region bounded by $y = x^3$, the x -axis and the line $x = 4$ for $x > 0$.

(c) The marginal cost function of firm is $MC = (\log x)^2$. Find the total cost of 100 units if the cost of producing one unit is Rs. 22.

(d) Find the differential equation of the family of circles passing through the origin and having center on the x -axis.

4. Attempt any **one** of the following : $(1 \times 7 = 7)$

(a) Solve the following linear programming problem

$$\text{Max } 3x + 4y$$

$$\text{subject to } \begin{cases} 3x + 2y \leq 6 \\ x + 4y \leq 4 \end{cases} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Compute the increase in the criterion function if the first constraint changes to $3x + 2y \leq 8$.

- (b) Write the dual of the linear programming problem given in part (A) above and solve it.

[This question paper contains 20 printed pages.]

(7)

Your Roll No. JULY 2023

Sr. No. of Question Paper : 1297

F

Unique Paper Code : 2272101201

Name of the Paper : INTRODUCTORY
MACROECONOMICS

Name of the Course : B.A. (H) ECONOMICS –
DSE 4

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any 5 questions.
3. Part of the questions are to be attempted together.
4. All questions carry equal marks.
5. Use of a simple calculator allowed.
6. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.



P.T.O.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. कोई भी 5 प्रश्न हल करें।
3. प्रश्नों के खंडों को एक साथ हल करना होगा।
4. सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
5. एक साधारण कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।
6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. (a) (i) If a country has a current account deficit of \$60 billion and a capital account surplus of \$40 billion, what is the net change in its official reserve assets?

(ii) What is the main problem economists face in measuring the expected real interest rate?

(4)

- (b) What do you mean by open market operations? How does the central bank use open market operations to control the money supply in the economy?

(4)

- (c) (i) Within the classical model, explain the effect of a decrease in the marginal income tax rate on output, employment and price level with a suitable diagram. (7)

- (ii) Given the following information, compute the values of monetary and fiscal policy multipliers (3)

• Consumption $C = 100 + .75y_d$

• Investment $I = 240 - 10i$

• Tax rate $t = .20$

• Demand for money $L = .2y - 5i$

- (अ) (i) यदि किसी देश का चालू खाता घाटा \$60 बिलियन और पूंजी खाता अधिशेष \$40 बिलियन है, तो उसकी आधिकारिक आरक्षित संपत्ति में शुद्ध परिवर्तन क्या है?

- (ii) अपेक्षित वास्तविक ब्याज दर मापने में अर्थशास्त्रियों के सामने मुख्य समस्या क्या है?

- (ब) खुले बाजार संचालन से आप क्या समझते हैं? अर्थव्यवस्था में मुद्रा आपूर्ति को नियंत्रित करने के लिए केंद्रीय बैंक खुले बाजार संचालन का उपयोग कैसे करता है?

- (स) (i) क्लासिकल मॉडल के अंतर्गत, एक उपयुक्त चित्र के साथ उत्पादन, रोजगार और मूल्य स्तर पर सीमांत आयकर दर में कमी के प्रभाव की व्याख्या करें।

- (ii) निम्नलिखित सूचना को देखते हुए, मौद्रिक और राजकोषीय नीति गुणकों के मानों की गणना करें।

• उपभोग $C = 100 + .75y_d$

• निवेश $I = 240 - 10i$

• कर की दर $t = .20$

• मुद्रा की मांग $L = .2y - 5i$

2. (a) Why are goods and services counted in GDP at market value? Explain any two problems in using market value to measure production. (4)

- (b) (i) Consider a bond that promises to pay ₹100 in one year. What is the price of the bond today if the interest rate is 8%?

- (ii) Explain the relationship between the price of the bond and the interest rate. (4)

- (c) (i) Use suitable diagrams to explain how an increase in the public's taste towards less leisure would affect the real wages, output and employment in the classical model. (5)

- (ii) Using the IS-LM framework, show the effect of investment subsidy on the level of investment, equilibrium income level and interest rate. (5)

- (अ) वस्तुओं और सेवाओं को बाजार मूल्य पर GDP में क्यों गिना जाता है? उत्पादन को मापने के लिए बाजार मूल्य का उपयोग करने में किन्हीं दो समस्याओं की व्याख्या करें।

- (ब) (i) एक ऐसे बांड पर विचार करें जो एक वर्ष में ₹100 का भुगतान करने का वादा करता है। यदि ब्याज दर 8% है तो आज बांड की कीमत क्या है।

- (ii) बांड की कीमत और ब्याज दर के बीच संबंध स्पष्ट करें।

(स) (i) यह समझाने के लिए उपयुक्त आरेखों का उपयोग करें कि कम अवकाश के प्रति जनता की रुचि में वृद्धि, क्लासिकल मॉडल में वास्तविक मजदूरी, उत्पादन और रोजगार को कैसे प्रभावित करेगी।

(ii) IS-LM ढांचे का उपयोग करते हुए, निवेश के स्तर, संतुलन आय स्तर और ब्याज दर पर निवेश सन्धि का प्रभाव दिखाएं।

3. (a) (i) If an investor buys a bond with a nominal interest rate of 8% and sells it after one year when the inflation rate is 6%, what does the investor earn the real interest rate?

(ii) How does inflation affect the real interest rate and purchasing power of money? (4)

(b) What is the primary function of money as a medium of exchange? In what ways does money serve as a store of value? (4)

(c) (i) Given the following information :

- Consumption $C = 80 + .75YD$
- Investment $I = 200$
- Government Expenditure $G = 120$
- Tax $t = 0.20 y$

(a) Calculate budget surplus.

(b) What will be the effect on the budget surplus when the tax rate increases from 0.20 to 0.30? (4)

(ii) Under the conditions of the liquidity trap, fiscal policy will be perfectly effective because there is no crowding-out effect. Explain this statement using a suitable diagram. (6)

(अ) (i) यदि कोई निवेशक 8% की मौद्रिक ब्याज दर के साथ एक बांड खरीदता है और इसे एक वर्ष के बाद बेचता है जब मुद्रास्फीति दर 6% है, तो निवेशक वास्तविक ब्याज दर क्या अर्जित करता है?

(ii) मुद्रास्फीति वास्तविक ब्याज दर और मुद्रा की क्रय शक्ति को कैसे प्रभावित करती है?

(ब) विनिमय के माध्यम के रूप में मुद्रा का प्राथमिक कार्य क्या है? मुद्रा किस प्रकार मूल्य के भंडार के रूप में कार्य करता है?

(स) (i) निम्नलिखित जानकारी दी गई:

- उपभोग $C = 80 + .75YD$
- निवेश $I = 200$
- सरकारी व्यय $G = 120$
- टैक्स $t = .20 y$

(क) बजट अधिशेष की गणना करें।

(ख) कर की दर 0.20 से 0.30 तक बढ़ने पर बजट अधिशेष पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

(ii) तरलता जाल की शर्तों के तहत, राजकोषीय नीति पूरी तरह से प्रभावी होगी क्योंकि इसमें कोई क्राउडिंग आउट का प्रभाव नहीं होता है। उपयुक्त चित्र का उपयोग करके इस कथन की व्याख्या करें।

4. (a) Explain the different components of the current account of the balance of payments. (4)

(b) Explain how demand for money and supply determine the equilibrium interest rate when currency is the only money in the economy. Show the effect of an increase in nominal income on the equilibrium interest rate. Explain with a suitable diagram. (4)

(c) (i) How does proportional Income Tax act as an automatic stabiliser responding to economic shocks or fluctuation? (4)

(i) (a) Assume the following IS-LM model.

- $C = 100 + .75 YD$
- $I = 200 - 10 i$
- $G = 150$
- $t = .20y$
- $L = .4 y - 2i$
- $M = 800$
- $P = 2$

(a) Calculate the equilibrium level of income and interest rate.

(b) How much investment and income will be crowded out if the government increases its purchases by 100 and the money supply is kept constant? (6)

(अ) भुगतान संतुलन के चालू खाते के विभिन्न घटकों की व्याख्या करें।

(ब) बताएं कि जब अर्थव्यवस्था में करेंसी ही एकमात्र मुद्रा है तो मुद्रा की मांग और आपूर्ति, ब्याज दर के संतुलन को कैसे निर्धारित करती है। संतुलन ब्याज दर पर मौद्रिक आय में वृद्धि का प्रभाव दिखाएँ। उपयुक्त चित्र सहित समझाइये।

(स) (i) अनुपातिक आयकर आर्थिक झटके या उतार-चढ़ाव का जवाब देने वाले स्वचालित स्टेबलाइजर के रूप में कैसे कार्य करता है?

(ii) मान लें कि निम्नलिखित IS-LM मॉडल है।

$$C = 100 + .75 YD$$

$$I = 200 - 10 i$$

$$G = 150$$

$$t = .20y$$

$$L = .4y - 2i$$

$$M = 800$$

$$P = 2$$

(क) आय और ब्याज दर के संतुलन स्तर की गणना करें।

(ख) यदि सरकार अपनी खरीद 100 तक बढ़ा दे और मुद्रा आपूर्ति स्थिर रखी जाए तो निवेश और आय का क्राउडिंग आउट कितना होगी?

5. (a) (i) From the following information, calculate GDP using the expenditure method

• Personal consumption expenditure (C)	10130
• Business fixed investment	1694
• Residential investment	477
• Inventory investment	-35
• Government purchasing of goods	

and services

2883

• Corporate profits

480

• Exports

1831

• Imports

2539

(ii) Explain why Transfer Payments are not included in the calculation of GDP. (4)

(b) Explain the process of the money multiplier, assuming people hold only checkable deposits and do not want to hold any currency. (4)

(c) (i) Why do changes in government purchases of goods and services have a larger effect on equilibrium income level than equal-sized changes in government transfer payments? (4)

(ii) For an economy it is given that :

$$C = 200 + 0.8 YD$$

$$I = 100$$

$$G = 160$$

$$TR = 50$$

$$t = .25.$$

(a) Find the equation of IS curve.

(b) Draw IS curve using the above IS equation.

(c) Examine this IS curve carefully and give a reason for its shape. (6)

(अ) (i) निम्नलिखित जानकारी से व्यय विधि का उपयोग करके सकल घरेलू उत्पाद की गणना करें

• व्यक्तिगत उपभोग व्यय (C) 10130

• व्यापारनिश्चित निवेश 1694

• आवासीय निवेश 477

• इन्वेंटरी निवेश -35

• वस्तुओं एवं सेवाओं की सरकारी खरीद 2883

• कॉर्पोरेट मुनाफा 480

• निर्यात 1831

• आयात 2539

(ii) बताएं कि हस्तांतरण भुगतान को GDP की गणना में शामिल क्यों नहीं किया जाता है।

(ब) मुद्रा गुणक की प्रक्रिया समझाएं, यह मानते हुए कि लोग केवल चेक सुविधा योग्य जमा राशि रखते हैं और कोई मुद्रा नहीं रखना चाहते हैं।

(स) (i) वस्तुओं और सेवाओं की सरकारी खरीद में बदलाव का सरकारी हस्तांतरण भुगतान में समान आकार के बदलाव की तुलना में संतुलन आय स्तर पर अधिक प्रभाव क्यों पड़ता है?

(ii) एक अर्थव्यवस्था के लिए यह दिया गया है कि:

- $C = 200 + 0.8 YD$
- $I = 100$
- $G = 160$
- $TR = 50$
- $t = .25$.

(क) IS वक्र का समीकरण खोजें।

(ख) उपरोक्त IS समीकरण का उपयोग करके IS वक्र बनाएं।

(ग) इस IS वक्र का ध्यानपूर्वक परीक्षण करें और इसके आकार का कारण बताएं।

6. (a) (i) If a country's investment is \$400 billion, its government saving is -\$100 billion, and its current account is \$50 billion, what is its private saving?

(ii) If a country's exports of goods and services are \$200 billion, its imports of goods and services are \$180 billion, its net income from abroad is \$10 billion, and its net transfers from abroad are -\$5 billion, what is its current account balance? (4)

(b) (i) Suppose the ratio of currency to checkable deposits is 0.25 and the reserve ratio is 0.20, calculate the value of money multiplier.

(ii) If the reserve ratio is increased to 0.40, what will be the new value of the multiplier? Give reasons for the change in the value of the multiplier. (4)

(c) Using the IS-LM model, derive the aggregate demand curve. What will be the effect on the aggregate demand curve if the nominal money supply is increased? (10)

- (अ) (i) यदि किसी देश का निवेश \$400 बिलियन है, उसकी सरकारी बचत - \$100 बिलियन है, और उसका चालू खाता \$50 बिलियन है, तो उसकी निजी बचत कितनी है?
- (ii) यदि किसी देश का वस्तुओं और सेवाओं का निर्यात \$200 बिलियन है, वस्तुओं और सेवाओं का आयात \$180 बिलियन है, विदेश से इसकी शुद्ध आय \$10 बिलियन है, और विदेश से इसका शुद्ध हस्तांतरण - \$5 बिलियन है, तो इसका चालू खाता शेष क्या है?
- (ब) (i) मान लीजिए कि मुद्रा और चेक सुविधायुक्त जमा का अनुपात 0.25 है और आरक्षित अनुपात 0.20 है, तो मुद्रा गुणक के मान की गणना करें।
- (ii) यदि आरक्षित अनुपात को 0.40 तक बढ़ा दिया जाए तो गुणक का नया मान क्या होगा? गुणक के मान में परिवर्तन के कारण बताइये।
- (स) IS-LM मॉडल का उपयोग करके, कुल मांग वक्र प्राप्त करें। यदि मौद्रिक मुद्रा आपूर्ति बढ़ जाती है तो कुल मांग वक्र पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

7. (a) (i) What is the definition and formula of GDP deflator?
- (ii) What statistic would you need to check before celebration if the nominal GDP doubled overnight? Why? (4)
- (b) (i) If the money supply in an economy is ₹15 trillion and the nominal GDP is ₹30 trillion, what is the velocity of money according to the quantity theory of money?
- (ii) What factors determine the velocity of money in the classical system? (4)
- (c) (i) How does an increase in government spending affect the position of the IS curve? Explain using a suitable diagram. (4)
- (ii) Suppose that in an economy :
- $C = 200 + 0.8 Y_d$
 - $t = .25 y$

- $I = 160$
- $G = 200$
- $TR = 100$

(a) Calculate the equilibrium levels of income and expenditure multiplier

(b) How much of government purchasing should be increased if the government wants to increase the equilibrium income level to 1650.

(c) How much of transfer payment (TR) should be increased to achieve equilibrium income level of 1650. (6)

(अ) (i) GDP अपस्फीतिकारक की परिभाषा और सूत्र क्या है?

(ii) यदि मौद्रिक सकल घरेलू उत्पाद रातोंरात दोगुना हो जाए तो जश्न मनाने से पहले आपको कौन से आंकड़े की जांच करने की आवश्यकता होगी? क्यों?

(ब) (i) यदि किसी अर्थव्यवस्था में मुद्रा की आपूर्ति ₹15 ट्रिलियन है और मौद्रिक GDP ₹30 ट्रिलियन है, तो मुद्रा के परिमाण सिद्धांत के अनुसार मुद्रा का वेग क्या है?

(ii) क्लासिकल प्रणाली में मुद्रा के वेग कौन से कारक निर्धारित करते हैं?

(स) (i) सरकारी व्यय में वृद्धि IS वक्र की स्थिति को कैसे प्रभावित करती है? उपयुक्त चित्र का प्रयोग करके समझाइये।

(ii) मान लीजिए कि एक अर्थव्यवस्था में :

- $C = 200 + 0.8 Y_d$
- $t = .25 y$
- $I = 160$
- $G = 200$
- $TR = 100$

(क) आय के संतुलन स्तर और व्यय गुणक की गणना करें।

(ख) यदि सरकार आय के संतुलन स्तर को 1650 तक बढ़ाना चाहती है तो सरकारी खरीद में किन्नी वृद्धि की जानी चाहिए?

(ग) 1650 के आय के संतुलन के स्तर को प्राप्त करने के लिए हस्तांतरण भुगतान (TR) में कितनी वृद्धि की जानी चाहिए?

[This question paper contains 20 printed pages.]

(8)

Your Roll No. JULY 2023

Sr. No. of Question Paper : 1327

F

Unique Paper Code : 2272101202

Name of the Paper : Intermediate Mathematical
Methods for Economics

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics

Semester / Type : II / DSC

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. This question paper is divided into **three** sections.
3. Use of simple calculator is allowed.
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।

2. यह प्रश्न पत्र तीन खण्डों में विभाजित है।
3. साधारण कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति है।
4. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

SECTION A

Attempt **any five** of the following questions.

(5×8=40)

निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. (a) A firm sells 2 brands X and Y of a soap. The outputs and prices are denoted by x , y and p , q respectively. The demand functions of the two brands are $x = 100 - 2p + 5q$ and $y = 80 + 4p - 3q$. Suppose brand X sells for 15/unit and Y for 12/unit. Calculate the total revenue of the firm. Estimate the approximate change in revenue if the prices are increased by 1/unit for X and 1.5/unit for Y and compare it with the actual change in revenue.

- (b) Find the domain and plot it for the following function:

$$z = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-3}$$

(4+4)

- (क) एक फर्म एक साबुन के 2 ब्रांड X और Y बेचती है। आउटपुट और कीमतों को क्रमशः x , y और p , q द्वारा निरूपित किया जाता है। दो ब्रांडों के मांग फलन $x = 100 - 2p + 5q$ और $y = 80 + 4p - 3q$ हैं। मान लीजिए कि ब्रांड 1.5/यूनिट के लिए और Y 12/यूनिट के लिए बेचता है। फर्म के कुल राजस्व की गणना करें। राजस्व में अनुमानित परिवर्तन का अनुमान लगाएं यदि कीमतों में एक्स के लिए 1/यूनिट और वाई के लिए 1.5/यूनिट की वृद्धि होती है और राजस्व में वास्तविक परिवर्तन के साथ इसकी तुलना करें।

- (ख) डोमेन खोजें और इसे निम्नलिखित फंक्शन के लिए प्लॉट करें :

$$z = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-3}$$

2. Suppose Firm X wishes to manufacture three SUVs in its plants at A and B using its labour force of L persons. Suppose the firm allocates the total labour force in the proportion α and $1 - \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) to the plants at A and that at B respectively and hence produces the total outputs of the three products (as measured in 100s of units) given by the vector

$$\alpha \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Given the above information, answer the following questions :

- (a) Is it possible for the firm to produce either of the following output vectors if outputs cannot be thrown away?

(i) $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

- (b) How do your answers to part (a) change if outputs can be thrown away?
- (c) What will be the revenue maximizing choice of the fraction α and how will it depend upon the selling prices (p_1 p_2 p_3) of the three SUVs? What condition must be put on the prices so that both the plants are used by the firm? (3+1+4)

मान लीजिए कि फर्म X अपने L व्यक्तियों की श्रम शक्ति का उपयोग करके A और B में अपने संयंत्रों में तीन SUVs का निर्माण करना चाहती है। मान लीजिए कि फर्म क्रमशः A और B में फैक्टरियों को α और $1 - \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) के अनुपात में कुल श्रम बल आवंटित करती है और इसलिए तीन उत्पादों के कुल आउटपुट का उत्पादन करती है (जैसा कि 100 इकाइयों में मापा जाता है) वेक्टर द्वारा दिया गया

$$\alpha \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

उपरोक्त जानकारी को देखते हुए, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें :

- (क) क्या फर्म के लिए निम्नलिखित आउटपुट वेक्टर में से किसी एक का उत्पादन करना संभव है यदि आउटपुट को फेंका नहीं जा सकता है?

(i) $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

(ख) यदि आउटपुट को फेंका जा सकता है तो भाग (ए) के लिए आपके उत्तर कैसे बदलते हैं?

(ग) अंश α का राजस्व अधिकतम करने का विकल्प क्या होगा और यह तीन एसयूवी की बिक्री कीमतों (p_1 p_2 p_3) पर कैसे निर्भर करेगा? कीमतों पर क्या शर्त रखी जानी चाहिए ताकि फर्म द्वारा दोनों संयंत्रों का उपयोग किया जा सके?

3. (a) Compute the expression for $\frac{\partial^{p+q}z}{\partial y^q \partial x^p}$ where

$$z = e^{x+y} (x + y).$$

(b) A production function is given by

$$Q(L, K) = A [\alpha L^p + (1 - \alpha) K^p]^{\frac{1}{p}}$$

Determine its degree of homogeneity and give the conditions under which it will have increasing, decreasing and constant returns to scale.

(4+4)

(क) $\frac{\partial^{p+q}z}{\partial y^q \partial x^p}$ के लिए व्यंजक की गणना करें जहाँ $z = e^{x+y} (x + y)$.

(ख) एक उत्पादन फलन $Q(L, K) = A [\alpha L^p + (1 - \alpha) K^p]^{\frac{1}{p}}$ द्वारा दिया जाता है। इसकी समरूपता की डिग्री निर्धारित करें और उन शर्तों को दें जिनके तहत यह बढ़ते, घटते और निरंतर पैमाने पर रिटर्न देगा।

4. (a) Find out the values of p for which the following set of vectors is linearly independent.

$$u = (3, -1, 3); v = (2, 1, 0) \text{ and } w = (2, 0, p).$$

(b) For each value of p find out a vector z that is orthogonal to each of the above three vectors u , v and w .

(4+4)

(क) p के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए सदिशों का निम्नलिखित समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र है।

$$u = (3, -1, 3); v = (2, 1, 0) \text{ और } w = (2, 0, p).$$

(ख) p के प्रत्येक मान के लिए एक सदिश z ज्ञात कीजिए जो उपरोक्त तीन सदिशों u , v और w में से प्रत्येक के लिए ओर्थोगोनल है।

5. Suppose that an economy has two sectors: Light Industry (Sector 1) and Heavy Industry (Sector 2) with the following input requirements.

Light Industry requires 0.20 units of its own output and 0.70 units of Heavy Industry's output while Heavy Industry requires none of its own output and 0.50 units of Light Industry's output in order to produce 1 unit of output. The final demands for two industries are 1500 and 4500 units respectively.

- Write down the Leontief system for the economy.
- Find the level of output that must be produced in each industry in order to meet the final demands.
- Suppose the prices of both goods are Re. 1 per unit each. What are the unit cost requirements for the two goods? Are the productions economically viable? (2+4+2)

मान लीजिए कि एक अर्थव्यवस्था के दो क्षेत्र हैं: निम्नलिखित इनपुट आवश्यकताओं के साथ हल्का उद्योग (सेक्टर 1) और भारी उद्योग (सेक्टर 2)।

प्रकाश उद्योग को अपने स्वयं के उत्पादन की 0.20 इकाइयों और भारी उद्योग के उत्पादन की 0.70 इकाइयों की आवश्यकता होती है जबकि भारी उद्योग को अपने स्वयं के उत्पादन की आवश्यकता नहीं होती है और उत्पादन की 1 इकाई का उत्पादन करने के लिए हल्के उद्योग के उत्पादन की 0.50 इकाइयों की आवश्यकता होती है। दो उद्योगों की अंतिम मांग क्रमशः 1500 और 4500 यूनिट है।

- अर्थव्यवस्था के लिए लियोन्टिफ प्रणाली लिखिए।
- अंतिम मांगों को पूरा करने के लिए प्रत्येक उद्योग में उत्पादन के स्तर का पता लगाएं।
- मान लीजिए कि दोनों वस्तुओं की कीमतें ₹ हैं। 1 प्रति यूनिट प्रत्येक दो वस्तुओं के लिए इकाई लागत आवश्यकताएं क्या हैं? क्या निर्माण आर्थिक रूप से व्यवहार्य हैं?

6. (a) For the following function defined on R^2 , find the critical points and classify them as maxima, minima or saddle:

$$f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$$

- (b) Determine the concavity or convexity of the following function. Also check for the quasi-concavity and quasi-convexity.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz \quad (4+4)$$

- (क) R2 पर परिभाषित निम्नलिखित फंक्शन के लिए, महत्वपूर्ण बिंदु खोजें और उन्हें मैक्सिमा, मिनिमा या सैडल के रूप में वर्गीकृत करें:

$$f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$$

- (ख) निम्नलिखित फलन की अवतलता या उत्तलता ज्ञात कीजिए।
अर्ध-अवतलता और अर्ध-उत्तलता की भी जाँच करें।

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$$

SECTION B

Attempt **any three** of the following questions.

(3×10=30)

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

7. (a) Find the level curve for the function

$$f(x, y) = \frac{2x - 2y}{x^2 + y^2 + 1} \text{ at } k = -1, 0, 1, \text{ and plot them}$$

in the same graph.

- (b) A firm uses x hours of unskilled labour and y hours of skilled labour each day to produce

$Q(x, y) = 60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ units of output. It currently employs 64 units of unskilled and 27 units of skilled labour.

- (i) In what direction (expressed as a unit vector) should it change (x, y) if it wants to change output most rapidly from the current level.
- (ii) If the firm hires 1.5 units of extra skilled labour, using calculus estimate the change in unskilled labour that will keep the output unchanged. (5+5)

- (क) फंक्शन $f(x, y) = \frac{2x - 2y}{x^2 + y^2 + 1}$ के लिए $k = -1, 0, 1$ पर

स्तर वक्र खोजें और उन्हें उसी ग्राफ में प्लॉट करें।

- (ख) एक फर्म उत्पादन के $Q(x, y) = 60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ इकाइयों का उत्पादन करने के लिए प्रत्येक दिन x घंटे अकुशल श्रम और y घंटे कुशल श्रम का उपयोग करती है। यह वर्तमान में अकुशल

की 64 इकाइयों और कुशल श्रम की 27 इकाइयों को रोजगार देता है।

(i) किस दिशा में (एक इकाई वेक्टर के रूप में व्यक्त) इसे बदलना चाहिए (x, y) यदि यह वर्तमान स्तर से सबसे तेजी से आउटपुट बदलना चाहता है।

(ii) यदि फर्म अतिरिक्त कुशल श्रम की 1.5 इकाइयों को किराए पर लेती है, तो कलन का उपयोग करके अकुशल श्रम में परिवर्तन का अनुमान लगाएं जो उत्पादन को अपरिवर्तित रखेगा।

8. (a) Find the eigenvalues and the associated eigenvectors of the following matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Is the above matrix diagonalizable? If so, find a suitable matrix P. (5+5)

(क) निम्नलिखित मैट्रिक्स के eigenvalues और संबंधित eigenvectors खोजें :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ख) क्या उपरोक्त मैट्रिक्स विकर्णीय है? यदि ऐसा है, तो एक उपयुक्त आव्यूह P ज्ञात कीजिए।

9. (a) The function f of two variables is defined by $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$. For what values of x_1 and x_2 is this function quasiconcave?

(b) A discriminating monopolistic firm produces two goods whose demand functions are :

$$p_1 = 12 - x_1, \quad p_2 = 36 - 5x_2$$

where, x_1 and x_2 are the quantities of the two goods produced and p_1 and p_2 the prices of a unit of each good. Knowing that the cost function is $C(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 15$, solve the corresponding profit maximizing problem and find x_1 , x_2 , p_1 and p_2 . (5+5)

(क) दो चरों के फलन f को $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ द्वारा परिभाषित किया गया है। x_1 और x_2 के किन मूल्यों के लिए यह फंक्शन क्वासिकोनकेव है?

(ख) एक भेदभावपूर्ण एकाधिकार फर्म दो वस्तुओं का उत्पादन करती है जिनके मांग फलन हैं :

$$p_1 = 12 - x_1, \quad p_2 = 36 - 5x_2$$

जहाँ x_1 और x_2 उत्पादित दो वस्तुओं की मात्राएँ हैं और p_1 और p_2 प्रत्येक वस्तु की एक इकाई की कीमतें हैं। यह जानते हुए कि लागत फलन $C(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 15$ है, संगत लाभ अधिकतम करने की समस्या को हल करें और x_1, x_2 और p_1, p_2 ज्ञात करें।

10. Consider the function $f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$

(a) Find all critical points of f and classify them by using the second-derivative test.

(b) Show that f has neither a global maximum nor a global minimum.

(c) Let $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 4\}$. Prove that f has global maximum and minimum points in S and find them. (4+2+4)

फलन $f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$ पर विचार करें

(क) f के सभी महत्वपूर्ण बिंदुओं को खोजें और दूसरे-व्युत्पन्न परीक्षण का उपयोग करके उन्हें वर्गीकृत करें।

(ख) दिखाएँ कि f का न तो वैश्विक अधिकतम है और न ही वैश्विक न्यूनतम।

(ग) माना $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 4\}$ । सिद्ध कीजिए कि f के S में वैश्विक अधिकतम और न्यूनतम बिंदु हैं और उन्हें ज्ञात कीजिए।

SECTION C

Attempt **any two** of the following questions.

(2×10=20)

निम्नलिखित में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

11. (a) The principal of a college correctly estimates that if the students are instructed to attend x hours of class and do y hours of extracurricular activities, they get a test score of T and achieve student happiness level of H as given by the following relations :

$$T = x^3 + xy^{1/2}$$

$$H = y^2 - 4x^{1/2}$$

Currently $x = 4$, $y = 1$, $T = 68$ and $H = -7$. Fearing student protests, the principal wants to moderately increase H to -2 and decrease T to 63 . Determine the values of x and y that will help the principal achieve this objective.

- (b) Are the following functions homogeneous? If yes, what is the degree of homogeneity? Also check if they are homothetic.

$$(i) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$(ii) g(x, y) = 2\ln x - \ln y \quad (5+5)$$

- (क) एक कॉलेज के प्रिंसिपल का सही अनुमान है कि यदि छात्रों को x घंटे की कक्षा में भाग लेने और y घंटे की पाठ्येतर गतिविधियों को करने का निर्देश दिया जाता है, तो उन्हें का एक टेस्ट स्कोर मिलता है और H का छात्र खुशी स्तर प्राप्त होता है, जैसा कि निम्नलिखित संबंधों द्वारा दिया गया है:

$$T = x^3 + xy^{1/2}$$

$$H = y^2 - 4x^{1/2}$$

वर्तमान में $x = 4$, $y = 1$, $T = 68$ और $H = -7$ छात्रों के विरोध के डर से, प्रधानाचार्य H को -2 तक मामूली रूप से बढ़ाना चाहते हैं और T को घटाकर 63 करना चाहते हैं। x और y के मान निर्धारित करें जो प्रधानाचार्य को इस उद्देश्य को प्राप्त करने में मदद करेंगे।

- (ख) क्या निम्नलिखित कार्य सजातीय हैं? यदि हाँ, तो समरूपता की मात्रा क्या है? यह भी जांचें कि क्या वे होमोथेटिक हैं।

$$(i) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$(ii) g(x, y) = 2\ln x - \ln y$$

12. (a) An upper triangular matrix is a square matrix if all the elements below the main diagonal are zeros. Consider a 3×3 upper triangular matrix A whose non-zero elements are equal to a constant a .

- (i) Find out A^2 and A^3 and show that they are also upper triangular matrices.
- (ii) Show by induction that A^n is an upper triangular matrix and that $\text{trace}(A^n) = 3a^n$ (where, trace is the sum of all the diagonal elements).

- (b) Consider a non-singular matrix T of order n such that

$$T^3 - 2T^2 + T - I = O_{n \times n} \text{ (null matrix)}$$

- (i) Use the above equation, prove that

$$T^{-1} = (T - I)^2.$$

- (ii) Show that, if $A^2 = T$ then $A = (T - I)^{-1}$ for some matrix A . (5+5)

- (क) एक ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स एक वर्ग मैट्रिक्स है यदि मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी तत्व शून्य हैं। एक 3×3 ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स A पर विचार करें जिसके गैर-शून्य तत्व एक स्थिरांक के बराबर हैं।

- (i) A^2 and A^3 खोजें और दिखाएं कि वे ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स भी हैं।
- (ii) प्रेरण द्वारा दिखाएँ कि A^n एक ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स है और वह $\text{trace}(A^n) = 3a^n$ (जहाँ, ट्रेस सभी विकर्ण तत्वों का योग है)।

- (ख) ऑर्डर n के गैर-एकवचन मैट्रिक्स T पर विचार करें जैसे कि

$$T^3 - 2T^2 + T - I = O_{n \times n} \text{ (null matrix)}$$

- (i) उपरोक्त समीकरण का प्रयोग करें, साबित करें कि

$$T^{-1} = (T - I)^2.$$

- (ii) दिखाएँ कि, अगर $A^2 = T$ तो $A = (T - I)^{-1}$ कुछ मैट्रिक्स A के लिए A .

13. (a) By drawing diagrams (or by making precise algebraic arguments), determine whether the following set is convex.

$$\{(x, y) : y \geq e^x\}$$

- (b) Solve the competitive firm's profit maximizing use of labour and capital for the case where,

$$Y = L^{0.2}K^{0.8}, p = 100, w = 10, \text{ and } r = 20.$$

Find the optimum values of K , L and π . Also, show that the solution is true maximum.

(3+7)

- (क) आरेख खींचकर (या सटीक बीजगणितीय तर्क बनाकर), यह निर्धारित करें कि निम्नलिखित सेट उत्तल है या नहीं।

$$\{(x, y): y \geq e^x\}$$

- (ख) मामले के लिए श्रम और पूंजी के उपयोग को अधिकतम करने वाली प्रतिस्पर्धी फर्म के लाभ को हल करें, जहां,

$$Y = L^{0.2}K^{0.6}, p = 100, w = 10, \text{ और } r = 20$$

K , L और π के इष्टतम मान ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि हल सत्य अधिकतम है।

[This question paper contains 32 printed pages.]

Your Roll No. JULY 2023

F

Sr. No. of Question Paper : 1349

(9)

Unique Paper Code : 2272101203

Name of the Paper : Intermediate Statistics for Economics

Name of the Course : B.A. (H) Economics DSC

Semester : II

Duration : 3 Hour

Maximum Marks : 90



Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. All questions within each section are to be answered in a contiguous manner on the answer sheet. Start each question on a new page, and all subparts of a question should follow one after the other.
3. All intermediate calculations should be rounded off to 3 decimal places. The values provided in statistical tables should not be rounded off. All final calculations should be rounded off to two decimal places.
4. The use of a simple non-programmable calculator is allowed.
5. Statistical tables are attached for your reference.
6. In all calculations, figures should be rounded to two decimal places.
7. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. प्रत्येक खंड के सभी प्रश्नों के उत्तर पत्रक पर सन्निहित तरीके से दीजिये। प्रत्येक प्रश्न को एक नए पृष्ठ पर प्रारंभ कीजिये, और एक प्रश्न के सभी उपभागों को एक के बाद एक अनुसरण कीजिये।
3. सभी मध्यवर्ती गणनाओं को 3 दशमलव स्थानों तक पूर्णांकित किया जाना चाहिए। सांख्यिकीय तालिकाओं में प्रदान किए गए मानों को गोल नहीं किया जाना चाहिए। सभी अंतिम गणनाओं को दो दशमलव स्थानों तक पूर्णांकित किया जाना चाहिए।
4. एक साधारण मेर-प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।
5. सांख्यिकीय टेबल आपके संदर्भ के लिए संलग्न हैं।
6. सभी गणनाओं में, आंकड़ों को दो दशमलव स्थानों पर गोल किया जाना चाहिए।
7. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

SECTION IDo any **two** questions.

किन्हीं दो प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

1. Let Y be the number of contracts received by a randomly selected infrastructure company. Suppose the probability mass function of Y is as follows :

Y	1	2	3	4
$P(y)$	0.2	0.4	0.3	0.1

- (a) Consider a random sample of two companies, obtain the probability distribution of S^2 (sample variance).
- (b) Calculate $P(S^2 > 2.7)$ and $P(1.5 < S^2 \leq 7.9)$, when a random sample of size two is selected. (5+5)

मान लीजिये कि Y बेतरीब ढंग से चुनी गई इन्फ्रास्ट्रक्चर कंपनी द्वारा प्राप्त अनुबंधों की संख्या है। मान लीजिए Y का प्रायिकता द्रव्यमान फलन इस प्रकार है :

Y	1	2	3	4
$P(y)$	0.2	0.4	0.3	0.1

- (अ) दो कंपनियों के एक यादृच्छिक नमूने पर विचार करें, S^2 (नमूना प्रसरण) का प्रायिकता वितरण प्राप्त कीजिए।
- (ब) $P(S^2 > 2.7)$ और $P(1.5 < S^2 \leq 7.9)$ की गणना कीजिए, जब आकार दो का एक यादृच्छिक नमूना चुना जाता है।

2. (a) How is systematic sampling different from judgement sampling. If $\text{Var}(X_1)$ is variance of X_1 and $\text{Var}(X_2)$ is variance of X_2 , then $\text{Var}(aX_1 - bX_2) = a^2\text{Var}(X_1) + b^2\text{Var}(X_2)$, where a and b are constants. Is this statement true? Explain.
- (b) The teacher of an economics class of size 35 knows that the time needed to evaluate a randomly chosen first year paper is a random variable with mean value of 4 minutes and a standard deviation of 3 minutes. If evaluation times are independent and the teacher starts evaluation at 5:30 pm and evaluates continuously, what is the probability that she completes evaluation before 8pm dinner starts? (5+5)

(अ) व्यवस्थित नमूनाकरण कैसे निर्णय नमूनाकरण से अलग है। यदि $\text{Var}(X_1) X_1$ का विचरण है और $\text{Var}(X_2) X_2$ का विचरण है तो $\text{Var}(aX_1 - bX_2) = a^2\text{Var}(X_1) + b^2\text{Var}(X_2)$, जहाँ a और b स्थिरांक हैं। क्या यह कथन सत्य है? व्याख्या कीजिए।

(ब) आकार 35 के एक अर्थशास्त्र वर्ग के शिक्षक जानते हैं कि यादृच्छिक रूप से चुने गए प्रथम वर्ष के पेपर का मूल्यांकन करने के लिए आवश्यक समय 4 मिनट के औसत मूल्य और 3 मिनट के मानक विचलन के साथ एक यादृच्छिक चर है। यदि मूल्यांकन का समय स्वतंत्र है और शिक्षिका शाम 5:30 बजे मूल्यांकन शुरू करती है और लगातार मूल्यांकन करती है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह 8 बजे रात का खाना शुरू होने से पहले मूल्यांकन पूरा कर लेगी?

3. If $\mu_1 = 30$, $\mu_2 = 40$, $\mu_3 = 50$, $\sigma_1^2 = 15$, $\sigma_2^2 = 25$, and $\sigma_3^2 = 5$ are mean values and variance of three independently and normally distributed random variables X_1 , X_2 , and X_3 , respectively.

(a) Calculate $P(24 \leq X \leq 39)$, where $X = 0.3X_1 - X_2 + 1.7 X_3$.

(b) Calculate $P(X_1 - 2X_2 \leq 3X_3)$. Can you find this probability if population is not normal and sample size is 3? Why/ Why not? (5+5)

यदि $\mu_1 = 30$, $\mu_2 = 40$, $\mu_3 = 50$, $\sigma_1^2 = 15$, $\sigma_2^2 = 25$, और $\sigma_3^2 = 5$ क्रमशः तीन स्वतंत्र रूप से और सामान्य रूप से वितरित यादृच्छिक चर X_1 , X_2 , और X_3 के माध्य मान और प्रसरण हैं।

(अ) $P(24 \leq X \leq 39)$, की गणना कीजिए, जहाँ $X = 0.3X_1 - X_2 + 1.7 X_3$ ।

(ब) $P(X_1 - 2X_2 \leq 3X_3)$ की गणना कीजिए। यदि जनसंख्या सामान्य नहीं है और प्रतिदर्श आकार 3 है, तो क्या आप यह प्रायिकता जात कर सकते हैं? क्यों/क्यों नहीं?

SECTION II

Attempt any three questions.

किन्हीं तीन प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

4. (a) Suppose a sample of size n is to be drawn from a normal distribution where true standard deviation is 12.7. How large does n have to be to guarantee that the width of 97% confidence interval for true average value is 1.2. How does precision of estimation change if we change the confidence level from 97% to 99%.

(b) Suppose a population is normally distributed with mean p and unknown variance σ^2 . From this population, a sample of size 49 is drawn with an average value of 3.2 and standard deviation 2.6. Find the 92% confidence interval for p . Write the interpretation of 92% confidence interval for μ , also write the upper confidence bound for p for the 92% confidence level. (5+5)

(अ) मान लीजिए कि आकार n का एक नमूना एक सामान्य वितरण से खींचा जाना है जहाँ वास्तविक मानक विचलन 12.7 है। यह गारंटी देने के लिए n कितना बड़ा होना चाहिए कि सही औसत मान के लिए 97% विश्वास अंतराल की चौड़ाई 1.2 है। अगर हम कॉन्फिडेंस लेवल को 97% से 99% में बदल दें तो अनुमान की शुद्धता कैसे बदलती है।

(ब) मान लीजिए कि जनसंख्या सामान्य रूप से औसत μ और अज्ञात भिन्नता σ^2 के साथ वितरित की जाती है। इस आबादी से, आकार 49 का एक नमूना 3.2 के औसत मान और मानक विचलन 2.6 के साथ तैयार किया गया है। μ के लिए 92% विश्वास्यता अंतराल जात कीजिए। μ के लिए 92% कॉन्फिडेंस इंटरवल की व्याख्या लिखें, 92% कॉन्फिडेंस लेवल के लिए μ के लिए अपर कॉन्फिडेंस बाउंड भी लिखें।

5. (a) Let $X_1, X_2, \dots, X_5$ be a random sample of size 5 from the pdf

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \text{ where } 0 \leq x \leq 1$$

Find the moment estimator of θ . If $X_1 = 0.34, X_2 = 0.27, X_3 = 0.79, X_4 = 0.82, X_5 = 0.19$, what will be the moment estimate for θ .

- (b) (i) If an estimator is unbiased its mean square error (MSE) is equal to its variance, is this statement correct? Answer with the help of relevant derivation.

- (ii) If $\bar{Y}$ and $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 / n$ are maximum likelihood estimators (M.L.E.s) of the mean and variance of a normal distribution, then what will be the M.L.E. of $E(Y^2)$? (5+5)

- (अ) मान लीजिये $X_1, X_2, \dots, X_5$ पीडीएफ से आकार 5 का एक यादृच्छिक नमूना हो

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \text{ जहाँ } 0 \leq x \leq 1$$

θ का आधुनिक अनुमानक ज्ञात कीजिए। यदि $X_1 = 0.34, X_2 = 0.27, X_3 = 0.79, X_4 = 0.82, X_5 = 0.19$, θ के लिए आधुनिक अनुमान क्या होगा?

- (ब) (i) यदि एक अनुमानक निष्पक्ष है तो इसकी औसत वर्ग त्रुटि (MSE) इसके भिन्नता के बराबर है, क्या यह कथन सही है? प्रासंगिक व्युत्पत्ति की सहायता से उत्तर दीजिए।

- (ii) यदि $\bar{Y}$ और $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 / n$ एक सामान्य बंटन के माध्य और प्रसरण के अधिकतम संभावना अनुमानक (M.L.E.) हैं, तो $E(Y^2)$ का M.L.E. क्या होगा?

6. (a) A random sample of 100 items taken from a large batch of articles contains 5 defective items. Estimate the true average proportion of defective items in the batch in a way that conveys information about precision and reliability. (Assume 95% level of confidence).

- (b) Consider a sample of random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ where $n > 10$,

$$E(X_i) = \mu, \text{ Var}(X_i) = \sigma^2 > 0 \text{ and the estimator } \hat{\gamma} = \frac{1}{n-10} \sum_{i=11}^n X_i. \text{ Calculate}$$

- (i) Bias of $\hat{\gamma}$

- (ii) Variance of $\hat{\gamma}$

- (iii) Mean Square Error of $\hat{\gamma}$ (5+5)

- (अ) लेखों के एक बड़े बैच से लिए गए 100 आइटमों के एक यादृच्छिक नमूने में 5 दोषपूर्ण आइटम हैं। बैच में दोषपूर्ण वस्तुओं के वास्तविक औसत अनुपात का इस तरह से अनुमान लगाएं जो सटीकता और विश्वसनीयता के बारे में जानकारी देता है। (95% आत्मविश्वास का स्तर मान लीजिए)।

- (ब) यादृच्छिक चर $X_1, X_2, \dots, X_n$ के एक नमूने पर विचार कीजिए जहाँ $n > 10, E(X_i) = \mu,$

$$\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0 \text{ और अनुमानक } \hat{\gamma} = \frac{1}{n-10} \sum_{i=11}^n X_i \text{ गणना कीजिए}$$

- (i) $\hat{\gamma}$ का बायस

- (ii) $\hat{\gamma}$ का प्रसरण

- (iii) $\hat{\gamma}$ की माध्य वर्ग त्रुटि

7. (a) A psychologist estimates the mean reaction time for a sample of $n = 9$ respondents.

(i) Calculate the width of the 90% confidence interval for true population variance σ^2 .

(ii) Calculate the upper bound on sample size "n" so that the expected width of the confidence interval calculated in (i) does not exceed the true population variance σ^2 .

- (b) A random sample of 20 workers in a village was found to have a mean daily income of Rs. 45 and a sample standard deviation of Rs. 8. Based on the sample data, the government wants to obtain an estimate of the minimum income earned by workers "w", which covers 99 percent of workers in the population. Calculate w. (Assume population distribution to be normal). (5+5)

(अ) एक मनोवैज्ञानिक एन = 9 उत्तरदाताओं के नमूने के लिए औसत प्रतिक्रिया समय का अनुमान लगाता है।

(i) वास्तविक जनसंख्या प्रसरण σ^2 के लिए 90% कॉन्फिडेंस इंटरवल की चौड़ाई की गणना कीजिए।

(ii) नमूना आकार "न" पर ऊपरी सीमा की गणना कीजिए ताकि (i) में गणना की गई विश्वास अंतराल की अपेक्षित चौड़ाई वास्तविक जनसंख्या भिन्नता σ^2 से अधिक न हो।

- (ब) एक गाँव में 20 श्रमिकों के एक याइचिलिक नमूने में रुपये की औसत दैनिक आय 45 रुपये पाई गई और नमूना मानक विचलन 8 रुपये है। नमूना डेटा के आधार पर, सरकार श्रमिकों "डब्ल्यू" द्वारा अर्जित न्यूनतम आय का अनुमान प्राप्त करना चाहती है, जो आबादी में 99 प्रतिशत श्रमिकों को कवर करती है। डब्ल्यू की गणना कीजिए। (जनसंख्या वितरण को सामान्य मान कीजिए)।

SECTION III

Attempt any **four** questions.

किन्हीं चार प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

8. (a) The chip of a processor requires a special kind of setting. A lot of re-setting is required if the setting is not optimal. Prior to a demo too many re-setting operations were required. In a sample of 200 units, 26 chips required re-setting. A training workshop explained the process of chips manufacturing in a dynamic and efficient manner that reduced the task of re-setting. A new sample of size 200 had only 12 that needed re-setting. Is this sufficient evidence to conclude at the 0.01 level of significance that the training workshop have been effective in reducing the task of re-setting?

- (b) Studying the entry of runners at two busy parks between 6 p.m. and 8 p.m., it was found that on 40 weekdays there were on the average 247.3 runners entering the first park while on 30 weekdays there were on the average 254.1 runners entering the second park. The corresponding sample standard deviations are $s_1 = 15.2$ and $s_2 = 18.7$. Test the null hypothesis $\mu_1 - \mu_2 = 0$ against the alternative hypothesis $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ at the level of significance $\alpha = 0.01$. What would be your conclusion using the p-value of the test. (5+5)

- (अ) प्रोसेसर की चिप को एक विशेष प्रकार की सेटिंग की आवश्यकता होती है। यदि सेटिंग इष्टतम नहीं है तो बहुत सी री-सेटिंग की आवश्यकता होती है। डेमो से पहले बहुत से री-सेटिंग ऑपरेशन्स की आवश्यकता होती थी। 200 इकाइयों के नमूने में, 26 चिप्स को फिर से सेट करने की

आवश्यकता होती है। एक प्रशिक्षण कार्यशाला में चिप्स निर्माण की प्रक्रिया को गतिशील और कुशल तरीके से समझाया गया, जिससे री-सेटिंग का कार्य कम हो गया। आकार 200 के एक नए नमूने में केवल 12 थे जिन्हें फिर से सेट करने की आवश्यकता थी। क्या यह 0.01 के महत्व के स्तर पर निष्कर्ष निकालने के लिए पर्याप्त साक्ष्य है कि प्रशिक्षण कार्यशाला पुनः सेटिंग के कार्य को कम करने में प्रभावी रही है?

(ब) शाम 6 और रात 8 बजे के बीच दो व्यस्त पार्कों में धावकों को प्रवेश का अध्ययन किया गया। यह पाया गया कि 40 सप्ताह के दिनों में औसतन 247.3 धावक पहले पार्क में प्रवेश करते थे जबकि 30 सप्ताह के दिनों में दूसरे पार्क में औसतन 254.1 धावक प्रवेश करते थे। संबंधित नमूना मानक विचलन $s_1 = 15.2$ और $s_2 = 18.7$ हैं। शून्य परिकल्पना $\mu_1 - \mu_2 = 0$ का वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ के विरुद्ध महत्व $\alpha = 0.01$, के स्तर पर परीक्षण कीजिए। p -वैल्यू का प्रयोग करके आपका निष्कर्ष क्या होगा?

9. (a) A student is timed 20 times in the performance of a task, getting mean $\bar{x} = 7.9$ minutes and standard deviation $s = 1.2$ minutes. If the probability of a Type I error is to be at most 0.05, does this constitute evidence against the null hypothesis that the average time is less than or equal to 7.5 minutes? Find the p -value of the test.

(b) Playing 10 rounds of golf every week, a golf professional averaged 71.3 with a standard deviation of 2.64. Test the null hypothesis that the consistency of his game is actually measured by standard deviation $\sigma = 2.40$, against the alternative hypothesis that he is less consistent. Use the level of significance 0.05. Assume that the distribution of his score every week, is approximately normal.

(5+5)

(अ) एक छात्र को एक कार्य के प्रदर्शन में 20 बार समय दिया जाता है, माध्य $\bar{x} = 7.9$ मिनट और मानक विचलन $s = 1.2$ मिनट प्राप्त होता है। यदि किसी प्रकार की त्रुटि की संभावना अधिकतम 0.05 है, तो क्या यह शून्य परिकल्पना के खिलाफ साक्ष्य का गठन करता है कि औसत समय 7.5 मिनट से कम या उसके बराबर है? परीक्षण का p -मान ज्ञात कीजिए।

(ब) हर हफ्ते गोल्फ के 10 राउंड खेलते हुए, एक गोल्फ पेशेवर का औसत 2.64 के मानक विचलन के साथ 7.3 था। शून्य परिकल्पना का परीक्षण कीजिए कि उसके खेल की निरंतरता वास्तव में मानक विचलन $\sigma = 2.40$ द्वारा मापी जाती है, वैकल्पिक परिकल्पना के विरुद्ध कि वह कम सुसंगत है। महत्व के स्तर 0.05 का उपयोग कीजिए। मान लीजिए कि हर हफ्ते उसके स्कोर का वितरण लगभग सामान्य है।

10. (a) Suppose an automobile company is looking for additives that might increase gas mileage. As a pilot study, they send thirty cars fueled with a new additive on a road trip from Bengaluru to Ahmedabad. Without the additive, those same cars are known to average 25.0 mpg with a standard deviation (σ) of 2.4mpg. Suppose it turns out that the thirty cars average $\bar{y} = 26.3$ mpg with the additive. What should the company conclude at 5% level of significance?

(b) Using the same information as in part a) suppose the company can commit two different types of errors. If the additive is effective but the position is taken that the increase from 25.0 to 26.3 is due solely to chance, the company will mistakenly pass up a potentially lucrative product. On the other hand, if the additive is not effective but the firm interprets the mileage increase as "proof" that the additive works, time and money will ultimately be wasted developing a product that has no intrinsic value. What are these errors known as? Calculate the probability of both the errors if the rejection region is given as $\bar{x} \geq 25.718$. Also assume that the true population mean (with the additive) is 25.750.

(5+5)

(अ) मान लीजिए कि एक ऑटोमोबाइल कंपनी एडिटिव्स की तलाश कर रही है जो गैस माइलेज बढ़ा सकती है। एक पायलट अध्ययन के रूप में, वे बेंगलुरु से अहमदाबाद की सड़क यात्रा पर एक नए योजक के साथ तीस कारों को भेजते हैं। योजक के बिना, उन्हीं कारों को 2.4 mpg के मानक विचलन (σ) तथा 25.0 mpg के औसत के साथ जाना जाता है। मान लीजिए कि यह पता चला है कि तीस कारों का औसत $\bar{y} = 26.3$ mpg एडिटिव के साथ है। 5% सार्थकता स्तर पर कंपनी को क्या निष्कर्ष निकालना चाहिए?

(ब) भाग (ए) के समान जानकारी का उपयोग करके मान लीजिए कि कंपनी दो अलग-अलग प्रकार की वुटियाँ कर सकती है। यदि योजक प्रभावी है, लेकिन स्थिति यह है कि 25.0 से 26.3 तक की वृद्धि पूरी तरह से संयोग के कारण है, तो कंपनी गलती से एक संभावित आकर्षक उत्पाद को छोड़ देगी। दूसरी ओर, यदि योजक प्रभावी नहीं है, लेकिन फर्म माइलेज वृद्धि को "सबूत" के रूप में व्याख्या करती है कि योजक काम करता है, समय और पैसा अंततः एक ऐसे उत्पाद को विकसित करने में बर्बाद हो जाएगा जिसका कोई आंतरिक मूल्य नहीं है। इन वुटियों को क्या कहा जाता है? यदि अस्वीकृत क्षेत्र : $\bar{x} \geq 25.718$ के रूप में दिया गया है, तो दोनों वुटियों की संभावना की गणना कीजिए। यह भी मान लीजिए कि वास्तविक जनसंख्या माध्य (योजक के साथ) 25.750 है।

11. (a) A random sample of 1000 workers from South India shows that their mean wages are Rs. 47 per hour with a standard deviation of Rs. 28. A random sample of 1500 workers from North India gives a mean wage of Rs. 49 per hour with a standard deviation of Rs. 40. Test if there is any significant difference between mean wages across North and South India for the population of workers at 1% level of significance.

(b) Two different computer processors are compared by measuring the processing speed for different operations performed by computers using the two processors. If 12 measurements with the first processor had a standard deviation of 0.1 GHz and 16 measurements with the second processor had a standard deviation of 0.15 GHz, can it be concluded that the processing speed of the second processor is less uniform? Use $\alpha = 0.05$ level of significance. What assumptions must be made as to how the two samples are obtained? (5+5)

(अ) दक्षिण भारत के 1000 श्रमिकों का एक यादृच्छिक नमूना दर्शाता है कि उनकी औसत मजदूरी 47 रुपये तथा मानक विचलन प्रति घंटा 28 रुपये है। उत्तर भारत के 1500 श्रमिकों का एक यादृच्छिक नमूना का औसत वेतन 49 रुपये प्रति घंटा तथा मानक विचलन 40 रुपये प्रति घंटा है। 1% सार्थक स्तर पर श्रमिकों की आबादी के लिए उत्तर और दक्षिण भारत में औसत मजदूरी के बीच कोई महत्वपूर्ण अंतर है या नहीं, इसका परीक्षण कीजिए।

(ब) दो अलग-अलग कंप्यूटर प्रोसेसर की तुलना दो प्रोसेसर का उपयोग कर कंप्यूटर द्वारा किए गए विभिन्न कार्यों के लिए प्रसंस्करण गति को मापने के द्वारा की जाती है। यदि पहले प्रोसेसर के साथ 12 मापों में 0.1 गीगाहर्टज का मानक विचलन था और दूसरे प्रोसेसर के साथ 16 मापों में 0.15 गीगाहर्टज का मानक विचलन था, तो क्या यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि दूसरे प्रोसेसर की प्रसंस्करण गति कम एकसमान है? महत्व के 0.05 स्तर का उपयोग कीजिए। दो नमूने कैसे प्राप्त किए जाते हैं, इसके बारे में क्या धारणाएँ बनाई जानी चाहिए?

12. (a) In a pilot process, almond milk was manufactured in $n = 8$ plants to yield (in litres) in a week.

26.8	32.5	29.7	24.6	31.5	39.8	26.5	19.9
------	------	------	------	------	------	------	------

Conduct a test of hypotheses with the intent of showing that the mean production is less than 36.2. Take level of significance $\alpha = 0.01$ and assume a normal population. Based on your conclusion, what error could you have made? Explain in the context of the problem.

- (b) Using the 95% confidence interval, for the mean reading time, following information is obtained:

N	Sample Mean	Sample Standard Deviation	95% Confidence Interval
15	6.009	1.078	(5.412, 6.606)

- (i) Decide whether or not to reject $H_0: \mu = 5.5$ hours in favour of $H_1: \mu \neq 5.5$ hours at level of significance $\alpha = 0.05$.
- (ii) Decide whether or not to reject $H_0: \mu = 5.3$ hours in favour of $H_1: \mu \neq 5.3$ hours at level of significance $\alpha = 0.05$.
- (iii) Based on the example what is the relationship between tests for two-sided alternatives and confidence intervals? (5+5)

- (अ) एक पायलट प्रक्रिया में, बादाम का दूध $n = 8$ पौधों में एक सप्ताह में उपज (लीटर में) के लिए निर्मित किया गया था।

26.8	32.5	29.7	24.6	31.5	39.8	26.5	19.9
------	------	------	------	------	------	------	------

औसत उत्पादन 36.2 से कम है यह दिखाने के इरादे से परिकल्पना का परीक्षण कीजिए। महत्व का स्तर $\alpha = 0.01$, लीजिए और एक सामान्य जनसंख्या मान लीजिए। आपके निष्कर्ष के आधार पर, आप क्या त्रुटि कर सकते थे? समस्या के संदर्भ में व्याख्या कीजिए।

- (ब) औसत पढ़ने के समय के लिए 95% विश्वास अंतराल का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित जानकारी प्राप्त की जाती है:

N	Sample Mean	Sample Standard Deviation	95% Confidence Interval
15	6.009	1.078	(5.412, 6.606)

- (i) तय कीजिए कि $H_0: \mu = 5.5$ घंटे को अस्वीकार करना है या नहीं $H_1: \mu \neq 5.5$ घंटे के पक्ष में, महत्व के स्तर $\alpha = 0.05$ पर।
- (ii) तय कीजिए कि $H_0: \mu = 5.3$ घंटे को अस्वीकार करना है या नहीं $H_1: \mu \neq 5.3$ घंटे के पक्ष में, महत्व के स्तर $\alpha = 0.05$ पर।
- (iii) उदाहरण के आधार पर दो तरफा विकल्पों और विश्वास अंतराल के लिए परीक्षणों के बीच क्या संबंध है?

A-2 Appendix Tables

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities

a. $n = 5$

$$B(x; n, p) = \sum_{i=0}^x b(y; n, p)$$

		p													
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
0		.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000
1		.990	.877	.719	.437	.333	.228	.118	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
2		1.000	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001
3		1.000	1.000	1.000	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023
4		1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226

b. $n = 10$

		p													
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
0		.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1		.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000
2		1.000	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000
3		1.000	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000
4		1.000	1.000	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000
5		1.000	1.000	1.000	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000
6		1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001
7		1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
8		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.254	.086	.004
9		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

c. $n = 15$

		p													
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
0		.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1		.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2		1.000	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3		1.000	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000
4		1.000	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000
5		1.000	1.000	.998	.939	.852	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000
6		1.000	1.000	1.000	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000
7		1.000	1.000	1.000	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000
8		1.000	1.000	1.000	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000
9		1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000
10		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001
11		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005
12		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036
13		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.920	.833	.451	.171
14		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.987	.965	.934	.537	.140

(continued)

Appendix Tables

A-3

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities (cont.)

d. $n = 20$

$$B(x; n, p) = \sum_{i=0}^x b(y; n, p)$$

		p													
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
0		.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1		.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2		.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3		1.000	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4		1.000	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5		1.000	1.000	.989	.804	.617	.416	.226	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000
6		1.000	1.000	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000
7		1.000	1.000	1.000	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000
8		1.000	1.000	1.000	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000
9		1.000	1.000	1.000	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000
10		1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000
11		1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000
12		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000
13		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.124	.087	.002	.000
14		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000
15		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.585	.370	.243	.003	.000
16		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.775	.589	.333	.016	.000
17		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.909	.794	.523	.075	.001
18		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.976	.931	.808	.264	.017
19		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.988	.878	.642	.182

(continued)

A-4 Appendix Tables

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities (cont.)

e. $n = 25$

$$B(x; n, p) = \sum_{i=0}^x b(x; n, p)$$

		p															
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99	
0	.778	.277	.072	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
1	.974	.642	.271	.027	.007	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
2	.998	.873	.537	.098	.032	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
3	1.000	.966	.764	.234	.096	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
4	1.000	.993	.902	.421	.214	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
5	1.000	.999	.967	.617	.378	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
6	1.000	1.000	.991	.780	.561	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
7	1.000	1.000	.998	.891	.727	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
8	1.000	1.000	1.000	.953	.851	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
9	1.000	1.000	1.000	.983	.929	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
10	1.000	1.000	1.000	.994	.970	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
11	1.000	1.000	1.000	.998	.980	.956	.732	.345	.078	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.983	.846	.500	.154	.017	.003	.000	.000	.000	.000	.000	
13	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.922	.655	.268	.044	.020	.002	.000	.000	.000	.000	
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.030	.006	.000	.000	.000	.000	
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.071	.017	.000	.000	.000	.000	
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.149	.047	.000	.000	.000	.000	
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.273	.109	.002	.000	.000	.000	
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.439	.220	.009	.000	.000	.000	
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.622	.383	.033	.001	.000	.000	
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.786	.579	.398	.007	.000	.000	.000	
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.904	.766	.636	.034	.000	.000	.000	
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.968	.902	.763	.627	.022	.000	.000	.000	
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.993	.973	.929	.858	.026	.000	.000	.000	
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.928	.823	.022	.000	.000	.000	

Table A.2 Cumulative Poisson Probabilities

$$F(x; \mu) = \sum_{i=0}^x \frac{e^{-\mu} \mu^i}{i!}$$

		μ									
		.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	
1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736	
2	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920	
3		1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.987	.981	
4				1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.996	
5							1.000	1.000	1.000	.999	
6								1.000	1.000	1.000	1.000

(continued)

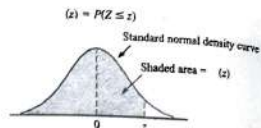
Appendix Tables A-5

Table A.2 Cumulative Poisson Probabilities (cont.)

$$F(x; \mu) = \sum_{i=0}^x \frac{e^{-\mu} \mu^i}{i!}$$

		μ											
		2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	15.0	20.0	
0	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
1	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001	.000	.000	.000	.000	
2	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006	.003	.000	.000	.000	
3	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021	.010	.000	.000	.000	
4	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055	.029	.001	.000	.000	
5	.983	.916	.785	.616	.446	.301	.191	.116	.067	.003	.000	.000	
6	.995	.966	.889	.762	.606	.450	.313	.207	.130	.008	.000	.000	
7	.999	.988	.949	.867	.744	.599	.453	.324	.220	.018	.001	.000	
8	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456	.333	.037	.002	.000	
9		.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587	.458	.070	.005	.000	
10		1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706	.583	.118	.011	.000	
11			.999	.995	.980	.947	.888	.803	.697	.185	.021	.000	
12			1.000	.998	.991	.973	.936	.876	.792	.268	.039	.000	
13				.999	.996	.987	.966	.926	.864	.363	.066	.000	
14				1.000	.999	.994	.983	.959	.917	.466	.105	.000	
15					.999	.998	.992	.978	.951	.568	.157	.000	
16					1.000	.999	.996	.989	.973	.664	.221	.000	
17						1.000	.998	.995	.986	.749	.297	.000	
18							.999	.998	.993	.819	.381	.000	
19								1.000	.999	.997	.875	.470	
20									1.000	.998	.917	.559	
21										.999	.947	.644	
22										1.000	.967	.721	
23											.981	.787	
24											.989	.843	
25											.994	.888	
26											.997	.922	
27											.998	.948	
28											.999	.966	
29											1.000	.978	
30												.987	
31												.992	
32												.995	
33												.997	
34												.999	
35												.999	
36												1.000	

Table A.3 Standard Normal Curve Areas

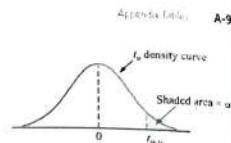


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

(continued)

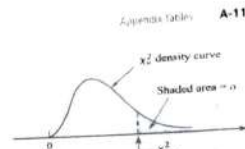
Table A.3 Standard Normal Curve Areas (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table A.5 Critical Values for t Distributions

ν	α						
	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

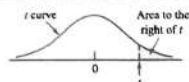
Table A.7 Critical Values for Chi-Squared Distributions



ν	α									
	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.281	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.691	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.286	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

$$\text{For } \nu > 40, \chi^2_{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{2}{\nu}} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\nu}}$$

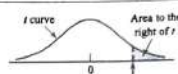
Table A.8 t Curve Tail Areas



λ	μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0		500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
0.1		468	465	463	463	462	462	462	461	461	461	461	461	461	461	461	461	461	461
0.2		437	430	427	426	425	424	424	423	423	423	423	422	422	422	422	422	422	422
0.3		407	396	392	390	388	387	386	385	385	385	385	385	385	384	384	384	384	384
0.4		379	364	358	355	353	352	351	350	349	349	348	348	348	347	347	347	347	347
0.5		352	333	326	322	319	317	316	315	315	314	313	313	313	312	312	312	312	312
0.6		328	305	295	290	287	285	284	283	282	281	280	280	279	279	279	278	278	278
0.7		306	278	267	261	258	255	253	252	251	250	249	248	247	247	247	247	247	247
0.8		285	254	241	234	230	227	225	223	222	221	220	220	219	218	218	218	217	217
0.9		267	232	217	210	205	201	199	197	196	195	194	193	192	191	191	191	190	190
1.0		250	211	196	187	182	178	175	173	172	170	169	169	168	167	167	167	166	166
1.1		235	193	176	167	162	157	154	152	150	149	147	146	146	144	144	144	143	143
1.2		221	177	158	148	142	138	135	132	130	129	128	127	126	124	124	124	123	123
1.3		209	162	142	132	125	121	117	115	113	111	110	109	108	107	107	106	105	105
1.4		197	148	128	117	110	106	102	100	99	98	97	96	95	93	92	91	90	90
1.5		187	136	115	104	097	092	089	086	084	082	081	080	079	077	077	077	076	076
1.6		178	125	104	092	085	080	077	074	072	070	069	068	067	065	065	065	064	064
1.7		169	116	094	082	075	070	065	064	062	060	059	057	056	055	055	054	054	053
1.8		161	107	085	073	066	061	057	055	053	051	050	049	048	046	046	045	045	044
1.9		154	099	077	065	058	053	050	047	045	043	042	041	040	038	038	038	037	037
2.0		148	092	070	058	051	046	043	040	038	037	035	034	033	032	032	031	031	030
2.1		141	085	063	052	045	040	037	034	033	031	030	029	028	027	027	026	025	025
2.2		136	079	058	046	040	035	032	029	028	026	025	024	023	022	022	021	021	021
2.3		131	074	052	041	035	031	027	025	023	022	021	020	019	018	018	017	017	017
2.4		126	069	048	037	031	027	024	022	020	019	018	017	016	015	015	014	014	014
2.5		121	065	044	033	027	023	020	018	017	016	015	014	013	012	012	012	011	011
2.6		117	061	040	030	024	020	018	016	014	013	012	012	011	010	010	010	009	009
2.7		113	057	037	027	021	018	015	014	012	011	010	010	009	008	008	008	007	007
2.8		109	054	034	024	019	016	013	012	010	009	009	008	008	007	007	006	006	006
2.9		106	051	031	022	017	014	011	010	009	008	007	007	006	005	005	005	005	005
3.0		102	048	029	020	015	012	010	009	007	007	006	006	005	004	004	004	004	004
3.1		099	045	027	018	013	011	009	007	006	006	005	005	004	004	004	003	003	003
3.2		096	043	025	016	012	009	008	006	005	005	004	004	003	003	003	003	002	002
3.3		094	040	023	015	011	008	007	005	005	004	004	003	003	002	002	002	002	002
3.4		091	038	021	014	010	007	006	005	004	003	003	002	002	002	002	002	002	002
3.5		089	036	020	012	009	006	005	004	003	003	002	002	002	002	002	001	001	001
3.6		086	035	018	011	008	006	004	004	003	003	002	002	002	002	002	001	001	001
3.7		084	033	017	010	007	005	004	004	003	002	002	002	002	002	002	001	001	001
3.8		082	031	016	010	006	004	003	003	002	002	002	002	002	002	002	001	001	001
3.9		080	030	015	009	006	004	003	003	002	002	001	001	001	001	001	001	001	001
4.0		078	029	014	008	005	004	003	003	002	002	001	001	001	001	001	001	000	000

(continued)

Table A.8 t Curve Tail Areas (cont.)



λ	μ	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	∞ ($\mu = 1$)
0.0		.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1		.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2		.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3		.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382	.382
0.4		.347	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5		.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6		.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.275
0.7		.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8		.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213
0.9		.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0		.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1		.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2		.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3		.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4		.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.086	.086	.085	.083	.082	.081
1.5		.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6		.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7		.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8		.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9		.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.033	.031	.030	.029
2.0		.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1		.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2		.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3		.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4		.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5		.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6		.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7		.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.004	.004	.003
2.8		.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9		.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0		.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1		.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2		.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001
3.3		.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.4		.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5		.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.6		.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000
3.7		.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.8		.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9		.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0		.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

Copyright 2010 Cengage Learning. All Rights Reserved. May not be copied, scanned, or duplicated, in whole or in part. Due to electronic rights, some third party content may be suppressed from the eBook and/or eChapter(s). Editorial review has deemed that any suppressed content does not materially affect the overall learning experience. Cengage Learning reserves the right to remove additional content at any time if subsequent rights restrictions require it.

Table A.9 Critical Values for F Distributions

		$\nu_1 = \text{numerator df}$								
α	$\nu_2 = \text{denominator df}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
.100	1	39.86	49.50	53.50	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
.050	1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
.010	1	4052.20	4999.50	5403.40	5624.60	5763.60	5859.00	5928.40	5981.10	6022.50
.001	1	405.284	500.000	540.379	562.500	576.405	585.937	592.873	598.144	6022.284
.100	2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
.050	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.29	19.33	19.35	19.37	19.38
.010	2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
.001	2	998.50	999.00	999.17	999.25	999.30	999.33	999.36	999.37	999.39
.100	3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
.050	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
.010	3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
.001	3	167.03	148.50	141.11	137.10	134.58	132.85	131.58	130.62	129.86
.100	4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
.050	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
.010	4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
.001	4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47
.100	5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
.050	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
.010	5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
.001	5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24
.100	6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
.050	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
.010	6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
.001	6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69
.100	7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
.050	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
.010	7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
.001	7	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33
.100	8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
.050	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
.010	8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
.001	8	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77
.100	9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
.050	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
.010	9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
.001	9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11
.100	10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
.050	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
.010	10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
.001	10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96
.100	11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
.050	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
.010	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
.001	11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12
.100	12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
.050	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
.010	12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
.001	12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48

(continued)

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

		$\nu_1 = \text{numerator df}$										
α	$\nu_2 = \text{denominator df}$	10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
		10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
.100	1	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.69	62.79	63.06	63.30
.050	1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.26	250.10	251.14	251.77	252.20	253.25	254.19
.010	1	6055.90	6106.30	6157.30	6208.70	6239.80	6260.60	6286.80	6302.50	6313.00	6339.40	6362.70
.001	1	605.621	610.668	615.764	620.908	624.017	626.099	628.712	630.285	631.337	633.972	636.301
.100	2	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.49
.050	2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49
.010	2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
.001	2	999.40	999.42	999.43	999.45	999.46	999.47	999.47	999.48	999.48	999.49	999.50
.100	3	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.13
.050	3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.53
.010	3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.35	26.32	26.22	26.14
.001	3	129.25	128.32	127.37	126.42	125.84	125.45	124.96	124.66	124.47	123.97	123.53
.100	4	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.76
.050	4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.63
.010	4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.65	13.56	13.47
.001	4	48.05	47.41	46.76	46.10	45.70	45.43	45.09	44.88	44.75	44.40	44.09
.100	5	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.12	3.11
.050	5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.43	4.40	4.37
.010	5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.24	9.20	9.11	9.03
.001	5	26.92	26.42	25.91	25.39	25.08	24.87	24.60	24.44	24.33	24.06	23.82
.100	6	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72
.050	6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.75	3.74	3.70	3.67
.010	6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.09	7.06	6.97	6.89
.001	6	18.41	17.99	17.56	17.12	16.83	16.67	16.44	16.31	16.21	15.98	15.77
.100	7	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.47
.050	7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.23
.010	7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.82	5.74	5.66
.001	7	14.08	13.71	13.32	12.93	12.69	12.53	12.33	12.20	12.12	11.91	11.72
.100	8	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.30
.050	8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.93
.010	8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	5.03	4.95	4.87
.001	8	11.54	11.19	10.84	10.48	10.26	10.11	9.92	9.80	9.73	9.53	9.36
.100	9	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.21	2.18	2.16
.050	9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.79	2.75	2.71
.010	9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.48	4.40	4.32
.001	9	9.89	9.57	9.24	8.90	8.69	8.55	8.37	8.26	8.19	8.00	7.84
.100	10	2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06
.050	10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54
.010	10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.08	4.00	3.92
.001	10	8.75	8.45	8.13	7.80	7.60	7.47	7.30	7.19	7.12	6.94	6.78
.100	11	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	1.98
.050	11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.49	2.45	2.41
.010	11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.81	3.78	3.69	3.61
.001	11	7.92	7.63	7.32	7.01	6.81	6.68	6.52	6.42	6.35	6.18	6.02
.100	12	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91
.050	12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30
.010	12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.54	3.45	3.37
.001	12	7.29	7.00	6.71	6.40	6.22	6.09	5.93	5.83	5.76	5.59	5.44

(continued)

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

		$r_1 = \text{numerator df}$									
		α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_2 = \text{denominator df}$	13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
		.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
		.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
		.001	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98
	14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
		.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
		.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
		.001	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58
	15	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
		.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
		.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
		.001	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
	16	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
		.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
		.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
		.001	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98
	17	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
		.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
		.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
		.001	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75
	18	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
		.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
		.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
		.001	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56
	19	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
		.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
		.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
		.001	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39
	20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
		.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
		.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
		.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
	21	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
		.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
		.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
		.001	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11
	22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
		.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
		.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
		.001	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99
	23	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
		.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
		.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
		.001	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89
	24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
		.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
		.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
		.001	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

(continued)

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

$r_1 = \text{numerator df}$													
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000			
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.85			
2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.21			
3.10	3.06	3.02	3.03	3.06	3.17	3.21	3.13	3.18	3.34	3.25			
6.80	6.52	6.23	5.93	5.75	5.63	5.47	5.37	5.30	5.14	4.99			
2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.80			
2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.22	2.18	2.14			
3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.18	3.09	3.02			
6.40	6.13	5.85	5.56	5.38	5.25	5.10	5.00	4.94	4.77	4.62			
2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.76			
2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.16	2.11	2.07			
3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	3.05	2.96	2.88			
6.08	5.81	5.54	5.25	5.07	4.95	4.80	4.70	4.64	4.47	4.33			
2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.78	1.75	1.72			
2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.11	2.06	2.02			
3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.93	2.84	2.76			
5.81	5.55	5.27	4.99	4.82	4.70	4.54	4.45	4.39	4.23	4.08			
2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.75	1.72	1.69			
2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.06	2.01	1.97			
3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.83	2.75	2.66			
5.58	5.32	5.05	4.78	4.60	4.48	4.33	4.24	4.18	4.02	3.87			
1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.72	1.69	1.66			
2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92			
3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.75	2.66	2.58			
5.39	5.13	4.87	4.59	4.42	4.30	4.15	4.06	4.00	3.84	3.69			
1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64			
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.93	1.88			
3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.67	2.58	2.50			
5.22	4.97	4.70	4.43	4.26	4.14	3.99	3.90	3.84	3.68	3.53			
1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.68	1.64	1.61			
2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.95	1.90	1.85			
3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.61	2.52	2.43			
5.08	4.82	4.56	4.29	4.12	4.00	3.86	3.77	3.70	3.54	3.40			
1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.62	1.59			
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.92	1.87	1.82			
3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.58	2.55	2.46	2.37			
4.95	4.70	4.44	4.17	4.00	3.88	3.74	3.64	3.58	3.42	3.28			
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.60	1.57			
2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.89	1.84	1.79			
3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.50	2.40	2.32			
4.83	4.58	4.33	4.06	3.89	3.78	3.63	3.54	3.48	3.32	3.17			
1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.62	1.59	1.55			
2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.86	1.81	1.76			
3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.45	2.35	2.27			
4.73	4.48	4.23	3.96	3.79	3.68	3.53	3.44	3.38	3.22	3.08			
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.57	1.54			
2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.84	1.79	1.74			
3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.40	2.31	2.22			
4.64	4.39	4.14	3.87	3.71	3.59	3.45	3.36	3.29	3.14	2.99			

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

α	$\nu_1 = \text{numerator df}$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.93	1.89
	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.28
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32
	.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.71
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29
	.001	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83
27	.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91
	.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31
	.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26
	.001	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76
28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90
	.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29
	.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23
	.001	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69
29	.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89
	.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28
	.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20
	.001	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64
30	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88
	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17
	.001	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58
40	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83
	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99
	.001	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21
50	.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80
	.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13
	.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89
	.001	12.22	7.96	6.34	5.46	4.90	4.51	4.22	4.00
60	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77
	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82
	.001	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86
100	.100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73
	.050	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03
	.010	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69
	.001	11.50	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61
200	.100	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70
	.050	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98
	.010	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60
	.001	11.15	7.15	5.63	4.81	4.29	3.92	3.65	3.43
1000	.100	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68
	.050	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95
	.010	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53
	.001	10.89	6.96	5.46	4.65	4.14	3.78	3.51	3.30

(continued)

Table A.9 Critical Values for F Distributions (cont.)

α	$\nu_1 = \text{numerator df}$										
	10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
.100	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.59	1.56	1.52
	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.82	1.77	1.72
	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.36	2.27	2.18
	4.56	4.31	4.06	3.79	3.63	3.52	3.37	3.28	3.22	3.06	2.91
.050	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.58	1.54	1.51
	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.80	1.75	1.70
	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.33	2.23	2.14
	4.48	4.24	3.99	3.72	3.56	3.44	3.30	3.21	3.15	2.99	2.84
.010	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.57	1.53	1.50
	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.79	1.73	1.68
	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.29	2.20	2.11
	4.41	4.17	3.92	3.66	3.49	3.38	3.23	3.14	3.08	2.92	2.78
.001	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.56	1.52	1.48
	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.71	1.66
	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.26	2.17	2.08
	4.35	4.11	3.86	3.60	3.43	3.32	3.18	3.09	3.02	2.86	2.72
.100	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.55	1.51	1.47
	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.75	1.70	1.65
	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.23	2.14	2.05
	4.29	4.05	3.80	3.54	3.38	3.27	3.12	3.03	2.97	2.81	2.66
.050	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.54	1.50	1.46
	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.63
	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.25	2.21	2.11	2.02
	4.24	4.00	3.75	3.49	3.33	3.22	3.07	2.98	2.92	2.76	2.61
.010	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.42	1.38
	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.64	1.58	1.52
	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	2.02	1.92	1.82
	3.87	3.64	3.40	3.14	2.98	2.87	2.73	2.64	2.57	2.41	2.25
.001	1.73	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.42	1.38	1.33
	2.03	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.58	1.51	1.45
	2.70	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.91	1.80	1.70
	3.67	3.44	3.20	2.95	2.79	2.68	2.53	2.44	2.38	2.21	2.05
.100	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.40	1.35	1.30
	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.53	1.47	1.40
	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.84	1.73	1.62
	3.54	3.32	3.08	2.83	2.67	2.55	2.41	2.32	2.25	2.08	1.92
.050	1.66	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.34	1.28	1.22
	1.93	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.45	1.38	1.30
	2.50	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.69	1.57	1.45
	3.30	3.07	2.84	2.59	2.43	2.32	2.17	2.08	2.01	1.83	1.64
.010	1.63	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.29	1.23	1.16
	1.88	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.39	1.30	1.21
	2.41	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.58	1.45	1.30
	3.12	2.90	2.67	2.42	2.26	2.15	2.00	1.90	1.83	1.64	1.43
.001	1.61	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.25	1.18	1.08
	1.84	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.33	1.24	1.11
	2.34	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.50	1.35	1.16
	2.99	2.77	2.54	2.30	2.14	2.02	1.87	1.77	1.69	1.49	1.22

Table A.10 Critical Values for Studentized Range Distributions

		<i>m</i>										
<i>v</i>	α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32
	.01	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18
	.01	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18
9	.05	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71
	.01	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61
	.01	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40
	.01	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35
	.01	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10
	.01	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11
30	.05	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81
	.01	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60
120	.05	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44
	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29